Übungsblatt 4

Besprechung am **16.04.2018**

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie, dass A und $A^\top$ dieselbe Jordan-Normalform J haben, falls eine Jordan-Normalform existiert. (Hinweis: Betrachten Sie die Kästchen von $J^\top$.)

b) Eine Matrix A habe das charakteristische Polynom $\chi = (X-2)^4\,(X-3)^2$ und das Minimalpolynom $m = (X-2)^2\,(X-3)^2$. Welche Möglichkeiten für die Jordan-Normalform gibt es?

c) Bestimmen Sie eine Jordan-Normalform der Matrix A und eine geordnete Basis B, sodass $B^{-1}AB$ diese Jordan-Normalform ist.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 Sei M die lineare Hülle der Vektoren $u = (-1,2,5,3,1), v = (3,-2,3,3,2)$ im $\mathbb{R}^5$. Berechnen Sie eine Basis von $M^\perp$.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie diejenigen Fälle, wo in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung die Gleichheit gilt.

Aufgabe 4 Untersuchen Sie, ob die angegebene Funktion ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum V ist.

a) $V = \mathbb{R}^{m\times n}$, $\langle A|B\rangle = Tr(B^\top A)$, wobei für eine Matrix $C = ((c_{ij}))_{i=1,j=1}^n$, $Tr(C) := \sum_{i=1}^n c_{ii}$ gilt.

b) $V = \mathbb{R}[x]$, $\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

c) $V = C\left([-1,1], \mathbb{R}\right), \langle f|g\rangle = \int_{-1}^1 xf(x)g(x)dx$

Aufgabe 5 a) Zeigen Sie, dass in einem normierten Raum $(V, \|.\|)$ $d : V\times V \to \mathbb{R}$, $d(x,y) := \|x-y\|$ eine Metrik ist.

b) Nach Satz 96 im Skriptum ist für einen Skalarproduktraum V die Funktion $\|.\| : V \to \mathbb{R}$, $\|x\| := \sqrt{\langle x|x\rangle}$ eine Norm auf V.
Zeigen Sie für alle $v, w \in V :\ v\perp w \Leftrightarrow \forall\lambda\in\mathbb{R} : \|v\| \leq \|v-\lambda w\|$