Übungsblatt 2

Besprechung am **19.03.2018**

Aufgabe 1 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von A als Matrix über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Z}_7$.

Aufgabe 2 Welche der folgenden Matrizen in $\mathbb{Q}^{3\times 3}$ sind diagonalisierbar? Geben Sie im Fall der Diagonalisierbarkeit eine Basis aus Eigenvektoren an.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -6 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

b) Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist.
Hinweis: Verwenden Sie dazu Aufgabe 5 von Übungsblatt 1.

Aufgabe 4 Sei $V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum aller Folgen in einem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$h\colon V \to V, \quad (a_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto (a_{n+1})_{n=0}^{\infty}$$

linear ist und bestimmen Sie ihre Eigenwerte und Eigenvektoren.

Aufgabe 5 a) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix. Zeigen Sie, dass A und $A^\top$ dieselben Eigenwerte haben.

b) Haben A und $A^\top$ auch dieselben Eigenvektoren?

c) Sei $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine zu A ähnliche Matrix. Zeigen Sie direkt, dass $\lambda \in \mathbb{K}$ genau dann ein Eigenwert von A ist, wenn λ ein Eigenwert von B ist.

d) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $h \in \mathrm{End}(V)$. Sei $v_1 \neq 0$ ein Eigenvektor zu λ_1 von h und $v_2 \neq 0$ ein Eigenvektor zu λ_2. Zeigen, wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann sind v_1 und v_2 linear unabhängig.