Übungsblatt 1

Besprechung am **12.03.2018**

Aufgabe 1.

a) $9, 4, 1, 2, -3, 8, \dots$ — wie geht's weiter? (Und warum?)

b) Berechnen Sie mit der Idee aus dem Beweis von Satz 71 eine C-finite Rekurrenz für $\sum_{k=0}^{n} F_k$, wobei F_k die k-te Fibonacci-Zahl ist.

Aufgabe 2. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und seien U_1, U_2, W_1, W_2 Unterräume von V. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Aus $U_1 \subseteq U_2$ und $U_1 \oplus W_1 = U_2 \oplus W_2 = V$ folgt $W_2 \subseteq W_1$.

b) Ist $U_1 \subseteq U_2$ und $U_1 \oplus W_1 = V$, so ist $U_1 \oplus (W_1 \cap U_2) = U_2$.

c) Ist $h\colon V \to V'$ ein Homomorphismus, so gilt $U_1 \subseteq U_2 \iff h(U_1) \subseteq h(U_2)$.

d) Ist $h\colon V \to V'$ ein Isomorphismus, so gilt auch $U_1 \cong h(U_1)$.

Aufgabe 3. Die lineare Abbildung $h\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^4$ sei (bezüglich der Standardbasen) definiert durch

$$h(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} x.$$

a) Konstruieren Sie eine geordnete Basis B_1 von $\mathbb{Q}^3$, so dass die Abbildungsmatrix von h bezüglich der Basis B_1 von $\mathbb{Q}^3$ und der Standardbasis von $\mathbb{Q}^4$ eine maximale Anzahl von Nullspalten hat.

b) Konstruieren Sie eine geordnete Basis B_2 von $\mathbb{Q}^4$, so dass die Abbildungsmatrix von h bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{Q}^3$ und der Basis B_2 von $\mathbb{Q}^4$ eine maximale Anzahl von Nullzeilen hat.

Aufgabe 4. Seien $U = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$ und $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$. Nach Satz 56 gilt

$$U/(U \cap W) \cong (U + W)/W.$$

Konstruieren Sie eine Matrix $A \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$, so dass die lineare Abbildung $h\colon U/(U \cap W) \to (U + W)/W$ definiert durch $h([x]_\sim) := [Ax]_\sim$ ein Isomorphismus ist. (Vergessen Sie nicht, die Wohldefiniertheit von h zu gewährleisten.)

Aufgabe 5. Ein Polynom $p \in \mathbb{K}[X]$ heißt *quadratfrei,* wenn es keine mehrfachen Faktoren hat, d.h., wenn es kein $q \in \mathbb{K}[X] \setminus \mathbb{K}$ mit $q^2 \mid p$ gibt.

a) Die lineare Abbildung $D\colon \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ ist definiert durch $D(X^n) = nX^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Für alle $p, q \in \mathbb{K}[X]$ gilt $D(pq) = D(p)q + pD(q)$.

b) Zeigen Sie: Wenn $\gcd(p, D(p)) = 1$ gilt, dann ist p quadratfrei.

c) Untersuchen Sie, ob $X^2 - X^3 - 3X^2 + X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ quadratfrei ist.