Lineare Algebra und Analytische Geometrie I · Winter 2017/18 31.01.2018

Erste Klausur, Variante $\boxed{\textbf{A}}$

	k								

Name (deutlich lesbar!) Matrikelnummer

- Es sind keine anderen Hilfsmittel als ein Stift zugelassen, insbesondere keine Unterlagen und keine elektronischen Geräte. Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus.
- Die Antworten zu Aufgabe 1 sind auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Notieren Sie die Antworten für die weiteren Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten weissen Papier. Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und legen Sie bei der Abgabe die Blätter in der Reihenfolge der Aufgaben zusammen, mit dem Aufgabenblatt als Deckblatt. Die abgegebenen Blätter werden oben links zusammengetackert. Halten Sie deshalb beim Schreiben genügend Abstand zu dieser Ecke.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Sie können die Teilnahme an der Klausur jederzeit ohne Abgabe einer Lösung beenden. Ein solcher Abbruch wird nicht als Fehlversuch gewertet.

Aufgabe 1. Wahr oder falsch?

	wahr	falsch
Für die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist $f(5)$ nicht definiert	☒	☐
Eine Funktion $f\colon \{1,2,3,4\} \to \{5,6,7\}$ kann nicht injektiv sein	☒	☐
Die Multiplikation von Dreiecksmatrizen ist kommutativ	☐	☒
Jede Teilmenge einer linear abhängigen Menge ist linear abhängig	☐	☒
Sind B_1, B_2 zwei Basen von V, so gilt $B_1 = B_2$ oder $B_1 \cap B_2 = \emptyset$	☐	☒
Für alle $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt $\det(A) = 0 \iff \ker A = \{0\}$	☐	☒
Die Zeilen einer 5×3-Matrix sind immer linear abhängig	☒	☐
Ist e_i der i-te Einheitsvektor, so ist Ae_i die i-te Zeile von A	☐	☒
Für jeden Vektorraum V gilt $V/\{0\} \cong V$ und $V/V \cong \{0\}$	☒	☐
Die Funktionen sin und cos sind als Elemente von $C([0,1],\mathbb{R})$ linear unabhängig	☒	☐
Die Abbildung $h\colon U \times W \to U \otimes W$, $h(u,w) = u \otimes w$ ist surjektiv	☐	☒
Die Abbildung $H\colon C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$, $H(f)(x) = f(x^2)$ ist linear	☒	☐

Aufgabe 2. Seien A und B Mengen und $f\colon A \to B$ eine bijektive Abbildung. Weiter sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Für $b_1, b_2 \in B$ sei definiert $b_1 \approx b_2 \iff f^{-1}(b_1) \sim f^{-1}(b_2)$. Zeigen Sie:

a) $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation.

b) Die Funktion $F\colon A/{\sim} \to B/{\approx}$, $F([a]_\sim) := [f(a)]_\approx$ ist wohldefiniert.

c) Die Funktion F aus Teil b) ist injektiv.

Lösung.

a) Reflexivität: $b \approx b \iff f^{-1}(b) \sim f^{-1}(b)$ folgt direkt aus der Reflexivität von $\sim$. Symmetrie: $b_1 \approx b_2 \Rightarrow f^{-1}(b_1) \sim f^{-1}(b_2) \Rightarrow f^{-1}(b_2) \sim f^{-1}(b_1) \Rightarrow b_2 \approx b_1$. Dabei wurde die Symmetrie von $\sim$ verwendet. Transitivität: $b_1 \approx b_2, b_2 \approx b_3 \Rightarrow f^{-1}(b_1) \sim f^{-1}(b_2), f^{-1}(b_2) \sim f^{-1}(b_3) \Rightarrow f^{-1}(b_1) \sim f^{-1}(b_3) \Rightarrow b_1 \approx b_3$. Dabei wurde die Transitivität von $\sim$ verwendet.

b) Seien a_1, a_2 so, dass $a_1 \sim a_2$. Zu zeigen: Dann gilt $f(a_1) \approx f(a_2)$. Nach Definition von $\approx$ gilt $f(a_1) \approx f(a_2) \iff f^{-1}(f(a_1)) \sim f^{-1}(f(a_2)) \iff a_1 \sim a_2$, wie gewünscht.

c) Seien $a_1, a_2 \in A$ so, dass $F([a_1]_\sim) = F([a_2]_\sim)$. Dann gilt $[f(a_1)]_\approx = [f(a_2)]_\approx$, also $f(a_1) \approx f(a_2)$, also $f^{-1}(f(a_1)) \sim f^{-1}(f(a_2))$, also $a_1 \sim a_2$, also $[a_1]_\sim = [a_2]_\sim$. Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 3.

a) Berechnen Sie eine Basis des Unterraums $\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \cap \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{Q}^4$.

b) Geben Sie die Koordinatendarstellungen der Basisvektoren, die Sie in a) berechnet haben, bezüglich der geordneten Basis $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{Q}^4$ an.

c) Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ habe den Rang k. Geben Sie die Dimensionen der Räume $\ker A$, $\operatorname{im} A$, $\operatorname{coker} A$, $\operatorname{coim} A$ an.

d) Seien $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Zeigen Sie: $\operatorname{im} B \subseteq \ker A \iff AB = 0$.

Lösung.

a)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \; | \cdot (-1) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \; | : 4$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \; | : (-8)$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Auffüllen mit einer -1-Zeile liefert den Kern $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. Daraus folgt: Der Schnitt der beiden Vektorräume ist $\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ -1 \\ -1 \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Daraus folgt: Die gesuchte Koordinatendarstellung ist $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $\dim\ker A = m - k$, $\dim\operatorname{im} A = \dim\operatorname{coim} A = k$, $\dim\operatorname{coker} A = n - k$.

d) „$\Rightarrow$“ zu zeigen: für alle $x \in \mathbb{K}^n$ gilt $ABx = 0$. Sei $x \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt $Bx \in \operatorname{im} B \subseteq \ker A$, also $A(Bx) = 0$, wie gefordert.

„$\Leftarrow$“ Sei $x \in \operatorname{im} B$, etwa $x = By$ für ein $y \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt $Ax = ABy = 0$, also $x \in \ker A$, wie behauptet.

Aufgabe 4. Sei $h\colon V \to W$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie:

a) Wenn $v_1, \dots, v_n \in V$ linear abhängig sind, dann sind auch $h(v_1), \dots, h(v_n) \in W$ linear abhängig.

b) Wenn h injektiv ist, dann sind für jede Wahl $v_1, \dots, v_n \in V$ von linear unabhängigen Vektoren auch die Vektoren $h(v_1), \dots, h(v_n) \in W$ linear unabhängig.

c) Wenn für jede Wahl $v_1, \dots, v_n \in V$ von linear unabhängigen Vektoren auch die zugehörigen Vektoren $h(v_1), \dots, h(v_n) \in W$ linear unabhängig sind, dann ist h injektiv.

Lösung.

a) Sind $v_1, \dots, v_n \in V$ linear abhängig, so gibt es $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, von denen nicht alle Null sind, so dass $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$. Dann gilt $0 = h(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 h(v_1) + \cdots + \alpha_n h(v_n)$, und daraus folgt die Behauptung.

b) Seien $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig und seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ so, dass $\alpha_1 h(v_1) + \cdots + \alpha_n h(v_n) = 0$. Dann gilt $h(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = 0$. Da h nach Voraussetzung injektiv ist, gilt $\ker h = \{0\}$, also $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$. Mit der linearen Unabhängigkeit von $v_1, \dots, v_n$ folgt $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

c) Es genügt zu zeigen, dass $\ker h \subseteq \{0\}$ gilt. Sei also $v \in \ker h$. Dann ist $h(v) = 0$, also $h(v)$ als einzelner Vektor linear abhängig. Nach Voraussetzung ist dann auch v als einzelner Vektor linear abhängig. Dann muss $v = 0$ sein.