Übungsblatt 14

Besprechung am **29.01.2018**

Aufgabe 1 Sei G eine Gruppe. Für $g \in G$ sei $\kappa_g : G \to G$ definiert durch $\kappa_g(x) := gxg^{-1}$. Zeigen Sie:

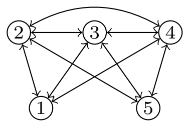
a) Für alle $g \in G$ ist κ_g ein Gruppenisomorphismus

b) Für alle $g, h \in G$ gilt $\kappa_{gh} = \kappa_g \circ \kappa_h$, $\kappa_{g^{-1}} = \kappa_g^{-1}$

Aufgabe 2 Sei $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum der reellen stetigen Funktionen. Für $m \in \mathbb{R}$ sei $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_m(x) := \max\{1 - 2|x - m|, 0\}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $B := \{f_m \mid m \in \mathbb{R}\}$ ist linear unabhängig in $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

b) $\langle B \rangle = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$



Aufgabe 3 Der Graph $G = (V, E)$ sei gegeben durch $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 3), (5, 2)\}$. (Siehe Abbildung rechts.)

a) Bestimmen sie die Menge $Aut(G)$ aller Isomorphismen $h : V \to V$. Zeigen Sie, dass $Aut(G)$ bezüglich der Hintereinanderausführung $\circ$ von Funktionen eine Gruppe bildet.

b) Zeigen Sie, dass $Aut(G) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ gilt. (siehe Bsp. 9, 14 auf Seite 31 im Skriptum)

Aufgabe 4 Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $f, g : V \to V$ lineare Abbildungen, $f \neq 0$. Zeigen Sie:

a) Falls f nicht bijektiv ist, dann gibt es eine lineare Abbildung $h : V \to V$, sodass $f \circ h = 0$, aber $h \circ f \neq 0$ gilt. (Hinweis: Satz 52 könnte hilfreich sein.)

b) Aus der Bijektivität von $g \circ f$ folgt, dass beide Abbildungen f, g bijektiv sind. Stimmt das auch, wenn die Dimension von V nicht endlich ist? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 5 Ein Code $\{0\} \neq U \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ sei definiert durch $\{x \mid Ax = 0\}$, wobei $A \in \mathbb{Z}_2^{m \times n}$ ist. Zeigen Sie:

a) $\dim U = n - Rang\ A$

b) Die Distanz d von U ist die größte Zahl $d \in \mathbb{N}$, sodass je $d - 1$ Spalten von A linear unabhängig sind.