	k	
Name (deutlich lesbar!)		Matrikelnummer

Aufgabe 1. Sei $V = \mathbb{K}^{2\times 2}$ der Raum aller 2×2-Matrizen und und $f\colon V \to V$ definiert durch $f(A) = A^\top$.

a) Geben Sie eine geordnete Basis B von V an.

b) Geben Sie die Abbildungsmatrix von f bezüglich B und B an.

Lösung.

a) Zum Beispiel $B = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$.

b) Mit der Basis B aus Teil a) lautet die Abbildungsmatrix $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Aufgabe 2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die lineare Funktion $f_n\colon \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}$ definiert durch $f_n(X^k) = \delta_{n,k}$ ($k \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie: Die Menge $\{f_0, f_1, \dots\} \subseteq \mathbb{Q}[X]^*$ ist linear unabhängig.

Lösung. Seien $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ so, dass $\alpha_0 f_0 + \cdots + \alpha_n f_n = 0$. Dann gilt $0 = 0(X^k) = (\alpha_0 f_0 + \cdots + \alpha_n f_n)(X^k) = \alpha_0 f_0(X^k) + \cdots + \alpha_n f_n(X^k) = \alpha_0 \delta_{0,k} + \cdots + \alpha_n \delta_{n,k} = \alpha_k$ für jedes k.