

# Seminar Topics for the Proseminar “Formal Modelling”

Wolfgang Windsteiger

March 10, 2021

## 1 Common Requirements

The topics listed below cover well-known problems from the areas of graph theory and discrete optimization. Literature containing the theoretical framework explaining the problem and some solution algorithms will be available. The requirements are then

- to give a self-contained presentation of the problem,
- to present *one solution algorithm* **OR** an *overview over several solution methods*, and
- to implement at least one algorithm, if possible in Mathematica.

The results will be summarized in a short scientific paper and an accompanying talk.

## 2 List of Possible Topics

- The Max-Flow Problem.
- The Knapsack Problem.
- The Graph-Vertex-Coloring Problem.
- The Graph-Edge-Coloring Problem.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	1
1.1	Enumeration	2
1.2	Die Laufzeit von Algorithmen	5
1.3	Lineare Optimierungsprobleme	9
1.4	Sortieren	10
	Aufgaben	12
	Literatur	13
<b>2</b>	<b>Graphen</b>	15
2.1	Grundlegende Definitionen	15
2.2	Bäume, Kreise und Schnitte	20
2.3	Zusammenhang	27
2.4	Eulersche und bipartite Graphen	35
2.5	Planarität	38
2.6	Planare Dualität	47
	Aufgaben	49
	Literatur	54
<b>3</b>	<b>Lineare Optimierung</b>	57
3.1	Polyeder	59
3.2	Der Simplexalgorithmus	63
3.3	Implementierung des Simplexalgorithmus	66
3.4	Dualität	70
3.5	Konvexe Hüllen und Polytope	74
	Aufgaben	75
	Literatur	78
<b>4</b>	<b>Algorithmen für lineare Optimierung</b>	81
4.1	Die Größe von Ecken und Seitenflächen	81
4.2	Kettenbrüche	84
4.3	Gauß-Elimination	87
4.4	Die Ellipsoidmethode	91
4.5	Der Satz von Khachiyan	97
4.6	Separation und Optimierung	99
	Aufgaben	105
	Literatur	107

<b>5</b>	<b>Ganzzahlige Optimierung</b>	109
5.1	Die ganzzahlige Hülle eines Polyeders	111
5.2	Unimodulare Transformationen	116
5.3	Vollständige duale Ganzzahligkeit (TDI)	118
5.4	Vollständig-unimodulare Matrizen	122
5.5	Schnittebenen	127
5.6	Lagrange-Relaxierung	132
	Aufgaben	134
	Literatur	138
<b>6</b>	<b>Aufspannende Bäume und Arboreszenzen</b>	141
6.1	Aufspannende Bäume mit minimalem Gewicht	142
6.2	Arboreszenzen mit minimalem Gewicht	148
6.3	Polyedrische Darstellungen	152
6.4	Das Packen von aufspannenden Bäumen und Arboreszenzen	156
	Aufgaben	160
	Literatur	164
<b>7</b>	<b>Kürzeste Wege</b>	167
7.1	Kürzeste Wege von einer Quelle aus	168
7.2	Kürzeste Wege zwischen allen Knotenpaaren	173
7.3	Kreise mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht	176
7.4	Seichte leichte Bäume	178
	Aufgaben	180
	Literatur	182
<b>8</b>	<b>Netzwerkflüsse</b>	185
8.1	Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem	186
8.2	Der Satz von Menger	190
8.3	Der Edmonds-Karp-Algorithmus	193
8.4	Dinic', Karzanovs, und Fujishiges Algorithmus	194
8.5	Der Goldberg-Tarjan-Algorithmus	199
8.6	Gomory-Hu-Bäume	204
8.7	Die minimale Kapazität eines Schnittes in einem ungerichteten Graphen	210
	Aufgaben	213
	Literatur	221
<b>9</b>	<b>Flüsse mit minimalen Kosten</b>	227
9.1	Formulierung des Problems	227
9.2	Ein Optimalitätskriterium	230
9.3	Der Minimum-Mean-Cycle-Cancelling-Algorithmus	232
9.4	Der Sukzessive-Kürzeste-Wege-Algorithmus	236
9.5	Orlins Algorithmus	240
9.6	Der Netzwerk-Simplexalgorithmus	245
9.7	Zeitabhängige Flüsse	249

Aufgaben	252
Literatur	255
<b>10 Kardinalitätsmaximale Matchings</b>	259
10.1 Bipartite Matchings	260
10.2 Die Tutte-Matrix	262
10.3 Der Satz von Tutte	264
10.4 Ohrenzerlegungen faktorkritischer Graphen	268
10.5 Edmonds' Matching-Algorithmus	274
Aufgaben	284
Literatur	288
<b>11 Gewichtete Matchings</b>	293
11.1 Das Zuordnungsproblem	294
11.2 Abriss des gewichteten Matching-Algorithmus	296
11.3 Implementierung des gewichteten Matching-Algorithmus	299
11.4 Postoptimierung	313
11.5 Das Matching-Polytop	314
Aufgaben	318
Literatur	320
<b>12 <math>b</math>-Matchings und <math>T</math>-Joins</b>	323
12.1 $b$ -Matchings	323
12.2 $T$ -Joins mit minimalem Gewicht	327
12.3 $T$ -Joins und $T$ -Schnitte	332
12.4 Der Satz von Padberg und Rao	336
Aufgaben	339
Literatur	343
<b>13 Matroide</b>	345
13.1 Unabhängigkeitssysteme und Matroide	345
13.2 Andere Matroidaxiome	350
13.3 Dualität	354
13.4 Der Greedy-Algorithmus	359
13.5 Der Schnitt von Matroiden	364
13.6 Matroid-Partitionierung	369
13.7 Gewichteter Schnitt von Matroiden	371
Aufgaben	375
Literatur	378
<b>14 Verallgemeinerungen von Matroiden</b>	381
14.1 Greedoide	381
14.2 Polymatroide	385
14.3 Die Minimierung submodularer Funktionen	390
14.4 Schrijvers Algorithmus	392
14.5 Symmetrische submodulare Funktionen	396

14.6 Die Maximierung submodularer Funktionen	398
Aufgaben	401
Literatur	405
<b>15 NP-Vollständigkeit</b>	409
15.1 Turingmaschinen	410
15.2 Die Church'sche These	412
15.3 $P$ und $NP$	417
15.4 Der Satz von Cook	422
15.5 Einige grundlegende $NP$ -vollständige Probleme	426
15.6 Die Klasse $coNP$	433
15.7 $NP$ -schwere Probleme	436
Aufgaben	441
Literatur	446
<b>16 Approximationsalgorithmen</b>	449
16.1 Das Set-Covering-Problem	450
16.2 Das Max-Cut-Problem	455
16.3 Färbung	462
16.4 Approximationsschemata	470
16.5 Maximum-Satisfiability	473
16.6 Der $PCP$ -Satz	478
16.7 $L$ -Reduktionen	482
Aufgaben	489
Literatur	493
<b>17 Das Knapsack-Problem</b>	499
17.1 Das gebrochene Knapsack-Problem und das gewichtete Median-Problem	499
17.2 Ein pseudopolynomieller Algorithmus	502
17.3 Ein voll-polynomielles Approximationsschema	504
17.4 Das multidimensionale Knapsack-Problem	507
17.5 Der Nemhauser-Ullmann-Algorithmus	509
Aufgaben	513
Literatur	514
<b>18 Bin-Packing</b>	517
18.1 Greedy-Heuristiken	518
18.2 Ein asymptotisches Approximationsschema	523
18.3 Der Karmarkar-Karp-Algorithmus	527
Aufgaben	531
Literatur	533

<b>19</b>	<b>Mehrgüterflüsse und kantendisjunkte Wege</b>	537
19.1	Mehrgüterflüsse	538
19.2	Algorithmen für Mehrgüterflüsse	543
19.3	Das Sparsest-Cut-Problem und der Max-Flow-Min-Cut-Quotient	548
19.4	Der Satz von Leighton und Rao	549
19.5	Das gerichtete Kantendisjunkte-Wege-Problem	552
19.6	Das ungerichtete Kantendisjunkte-Wege-Problem	556
	Aufgaben	563
	Literatur	568
<b>20</b>	<b>Netzwerk-Design-Probleme</b>	573
20.1	Steinerbäume	574
20.2	Der Robins-Zelikovsky-Algorithmus	579
20.3	Rundung des Gerichtete-Komponenten-LP	586
20.4	Survivable-Network-Design	592
20.5	Ein primal-dualer Approximationsalgorithmus	595
20.6	Jains Algorithmus	604
20.7	Das VPN-Problem	611
	Aufgaben	614
	Literatur	618
<b>21</b>	<b>Das Traveling-Salesman-Problem</b>	623
21.1	Approximationsalgorithmen für das TSP	623
21.2	Das euklidische TSP	628
21.3	Lokale Suche	636
21.4	Das Traveling-Salesman-Polytop	642
21.5	Untere Schranken	649
21.6	Branch-and-Bound	652
	Aufgaben	655
	Literatur	659
<b>22</b>	<b>Standortprobleme</b>	663
22.1	Das unbeschränkte Standortproblem	663
22.2	Rundung von LP-Lösungen	665
22.3	Primal-duale Algorithmen	667
22.4	Skalierung und Greedy-Augmentierung	673
22.5	Beschränkung der Standortanzahl	676
22.6	Lokale Suche	680
22.7	Beschränkte Standortprobleme	686
22.8	Das universelle Standortproblem	689
	Aufgaben	697
	Literatur	699
	<b>Symbolverzeichnis</b>	701
	<b>Personenverzeichnis</b>	705
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	717