	k								

Name (deutlich lesbar!) Matrikelnummer

Aufgabe 1. Für $U, V, W \subseteq \mathbb{K}^n$ gelte $U \subseteq V$ und $U \oplus W = \mathbb{K}^n$. Zeigen Sie: $U \oplus (V \cap W) = V$.

Lösung. Summe: „$\subseteq$“ ist klar. „$\supseteq$“: Ist $v \in V$ beliebig, so ist $v \in \mathbb{K}^n = U \oplus W$. Damit gibt es eine eindeutige Zerlegung $v = u + w$ mit einem $u \in U$ und einem $w \in W$. Wegen $U \subseteq V$ muss $w = v - u \in V$ sein. Also ist $v \in U + (V \cap W)$.

Direktheit: Jedes $x \in U \cap (V \cap W)$ liegt erstrecht in $U \cap W = \{0\}$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie eine Basis von $\mathbb{Q}^3 / \langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \rangle$.

Lösung. Wegen

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 1 & 1\\3 & 2 & 1\end{pmatrix} \begin{matrix}-1\\+\\+\end{matrix} \begin{matrix}-3\\ \\ \end{matrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -1 & -2\\0 & -4 & -8\end{pmatrix} \begin{matrix}4\\+\end{matrix} \mid \cdot(-1)$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ist $\{[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}]_\sim\}$ eine mögliche Wahl.