Übungsblatt 10

Besprechung am **11.12.2017**

Aufgabe 1 Bestimmen Sie für die folgenden Unterräume $A, B \subseteq \mathbb{R}^4$ Basen von $A, B, A \cap B$ und $A + B$.

a) $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y+z \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}, B = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ z \\ y+2z \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

b) $A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle, B = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$

Aufgabe 2 Zeigen oder widerlegen Sie für Unterräume A, B, C eines Vektorraums V, $A \neq V$, $B \neq V$, $C \neq V$.

a) Falls $V = A \oplus B$ gilt, dann gibt es zu jedem $v \in V$ genau ein $a \in A$ und genau ein $b \in B$, sodass $v = a + b$ ist.

b) Falls $V = A + B$ gilt, dann gibt es zu jedem $v \in V$ genau ein $a \in A$ und genau ein $b \in B$, sodass $v = a + b$ ist.

c) Aus $V = A \oplus B = A \oplus C$ folgt $B = C$.

Aufgabe 3 Sei $A = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$ ein Unterraum des Vektorraums $\mathbb{R}^5$. Bestimmen Sie eine Basis des Faktorraums $\mathbb{R}^5/A$.

Aufgabe 4 Gegeben sind Unterräume A, B, C eines Vektorraums V.

a) Zeigen Sie, dass $(A \cap B) + (A \cap C) \subseteq A \cap (B + C)$ und $A + (B \cap C) \subseteq (A + B) \cap (A + C)$

b) Zeigen Sie durch Angabe von Beispielen, dass die Inklusionen in Teil a) strikt sein können.

Aufgabe 5 Sei $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ der Vektorraum der reellen Funktionen, und $U := \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^\mathbb{R}$. Bestimmen Sie einen Komplementärraum von U sowie dessen Dimension.