Übungsblatt 9

Besprechung am **4.12.2017**

Aufgabe 1 (Vektorräume)

a) Definieren Sie für die Gruppe $(\mathbb{R}^3, +)$ eine Multiplikation $\circ : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sodass alle Eigenschaften für einen Vektorraum erfüllt werden, außer Punkt 4 aus Definition 29 $(1 \cdot v = v)$.

b) Sei $(V, +)$ eine nicht notwendigerweise abelsche Gruppe und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ eine Multiplikation, welche alle Eigenschaften von Definition 29 erfüllt. Zeigen Sie, dass $(V, +)$ abelsch ist.

Aufgabe 2 (Unterräume) Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraums aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (Beweis oder Gegenbeweis)?

a) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(2) = f(3)\}$;

b) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(2x) = 3f(x)\}$;

c) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$;

d) die Menge aller konstanten Funktionen;

e) die Menge aller surjektiven Funktionen;

f) die Menge aller bijektiven Funktionen;

g) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{Q}\}$;

h) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{Q} : f(x) = 0\}$.

Aufgabe 3 Diese Aufgabe ist schriftlich auszuarbeiten.
X, Y, U seien Unterräume eines Vektorraums V. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $X + U = Y + U \iff X = Y$.

b) $X \cup Y$ ist ein Unterraum von V genau dann, wenn $X \subseteq Y$ oder $Y \subseteq X$.

Aufgabe 4 (Basisergänzung) Sei

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie eine Basis B für den von A erzeugten Unterraum, und ergänzen Sie diese Basis zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 5 (Polynome) Die Tschebyshow-Polynome $T_n \in \mathbb{Q}[X]$, für $n \in \mathbb{N}$, sind rekursiv definiert durch $T_0 = 1$, $T_1 = X$, sowie

$$\forall n \in \mathbb{N} : T_{n+2} = 2X \cdot T_{n+1} - T_n.$$

B bezeichne die Menge aller Tschebyschow-Polynome, also $B = \{T_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie,

a) dass der Grad von T_n genau n ist;

b) dass B linear unabhängig ist;

c) dass B eine Basis von $\mathbb{Q}[X]$ ist.