Übungsblatt 5

Besprechung am **6.11.2017**

Aufgabe 1 (Nullvektor)

a) Zeigen Sie Satz 14.5.: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$, $v \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\alpha v = 0 \implies \alpha = 0 \vee v = 0.$$

b) Ist die Menge, die nur den Nullvektor enthält, linear unabhängig?

Aufgabe 2 (Matrizenrechnung)

a) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 0 & 40 \\ 50 & 60 & 70 & 80 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $ABC + D$. Welche weiteren Summen und Produkte dieser Matrizen sind definiert?

b) Zeigen Sie die Sherman-Morrison-Woodbury-Formel: Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{K}^{m \times n}$, sodass $I_m + CA^{-1}B$ invertierbar ist. Dann ist auch $A + BC$ invertierbar, und es gilt

$$(A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I_m + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}.$$

Aufgabe 3 (Funktionen durch Matrizen) Wir betrachten den Raum unserer Anschauung mit x-, y- und z-Achsen. Bestimmen Sie jeweils eine Matrix A, sodass die Abbildung $v \mapsto Av$ einer

a) Spiegelung an der xz-Ebene,

b) Drehung an der y-Achse um $45°$ im Uhrzeigersinn,

c) Projektion aller Punkte zum nächstliegenden in der xy-Ebene

entspricht. Welche dieser Matrizen sind invertierbar?

Aufgabe 4 (Bestimmte Matrizen)

a) Für welche $n \in \mathbb{N}$ bildet $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \cup \{0\}$ einen Körper?

b) Finden Sie eine Matrix $N \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}$, sodass $N \neq 0$, aber $N^2 = 0$.

c) Finden Sie eine Matrix $M \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$, sodass $M^2 \neq 0$, aber $M^3 = 0$.

d) Finden Sie Matrizen W und I in $\mathbb{Q}^{2 \times 2}$, sodass

$$W^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad I^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (Permutationsmatrizen) Bestimmen Sie geeignete Permutationsmatrizen, mit denen die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

so multipliziert werden kann, dass im Ergebnis alle von 0 verschiedenen Einträge im oberen linken Viertel zu finden sind. Dasselbe für die Matrix $A^\top$.