k

Name (deutlich lesbar!) Matrikelnummer

Aufgabe 1. Sei R ein kommutativer Ring und $R^\times$ die Einheitengruppe von R. Auf R wird durch $a \sim b \iff \exists\, u \in R^\times : a = ub$ eine Äquivalenzrelation erklärt. Zeigen Sie:

a) Die Definition $\odot\colon R/{\sim} \times R/{\sim} \to R/{\sim}$, $[a]_\sim \odot [b]_\sim := [ab]_\sim$ ist zulässig.

b) Die Definition $\oplus\colon R/{\sim} \times R/{\sim} \to R/{\sim}$, $[a]_\sim \oplus [b]_\sim := [a+b]_\sim$ ist **nicht** zulässig.

Lösung.

a) Gilt $a \sim a'$ und $b \sim b'$, etwa $a = ua'$ und $b = vb'$ für gewisse $u, v \in R^\times$, so gilt $ab = ua'vb' = uva'b'$ (weil R kommutativ ist) und wegen $uv \in R^\times$ (wurde auf dem Übungsblatt bewiesen) folgt $ab \sim a'b'$. Damit ist die Definition zulässig.

b) Gegenbeispiel: In $\mathbb{Z}$ gilt $1 \sim -1$ und $2 \sim 2$, aber $3 = 1 + 2 \not\sim -1 + 2 = 1$.