Übungsblatt 4

Besprechung am **30.10.2017**

Aufgabe 1 Seien R_1 und R_2 Ringe. Das *direkte Produkt* von R_1 und R_2 ist das kartesische Produkt $R_1 \times R_2$ mit komponentenweiser Addition und Multiplikation:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad \text{und} \quad (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) := (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2)$$

für alle $x_1, y_1 \in R_1$ und $x_2, y_2 \in R_2$. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Das direkte Produkt $R_1 \times R_2$ ist ein Ring.

b) Das direkte Produkt $R_1 \times R_2$ ist genau dann kommutativ, wenn R_1 und R_2 kommutativ sind.

c) Wenn R_1 und R_2 Körper sind, dann ist auch das direkte Produkt $R_1 \times R_2$ ein Körper.

Aufgabe 2 Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $\mathbb{Z}_4$ ist ein Körper.

b) $\mathbb{Z}_5$ ist ein Körper.

Aufgabe 3 Sei R ein Ring mit Eins. Die Menge

$$R^\times = \{x \in R : x \text{ multiplikativ invertierbar}\}$$

heißt *Einheitengruppe* von R.

a) Zeigen Sie, dass $R^\times$ mit der Multiplikation von R eine Gruppe bildet.

b) Bestimmen Sie die Einheitengruppen von $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_6$, einem Körper K und dem Polynomring $K[X]$ über einem Körper K.

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass im Polynomring $R[X]$ über einem (nicht notwendigerweise kommutativen) Ring R für alle $p \in R[X]$ gilt

$$Xp = pX.$$

Aufgabe 5 Wir sagen, dass in einem kommutativen Ring R die Kürzungsregel gilt, wenn

$$\forall\ a, b, c \in R : ca = cb \text{ und } c \neq 0 \implies a = b.$$

a) Zeigen Sie, dass in einem Körper die Kürzungsregel gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Kürzungsregel auch für die ganzen Zahlen gilt.

c) Finden Sie einen kommutativen Ring, in dem die Kürzungsregel nicht gilt.

Zusatzfrage: Finden Sie eine „einfache“ Bedingung an einen kommutativen Ring R, aus dem die Kürzungsregel folgt, und die insbesondere für Körper und die ganzen Zahlen gilt.