Übungsblatt 3

Besprechung am **23.10.2017**

Aufgabe 1. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität und Surjektivität. Geben Sie bei bijektiven Funktionen auch die Umkehrfunktion an.

a) $f_{2017}\colon \{\mathrm{Jan}, \mathrm{Feb}, \ldots, \mathrm{Dez}\} \to \{\mathrm{Mo}, \mathrm{Di}, \ldots, \mathrm{So}\}$ sei die Funktion, die jedem Monat des Jahres 2017 den Wochentag zuordnet, auf den der erste Tag des Monats fällt.

b) $f\colon \{\square, \blacksquare, \textcolor{gray}{\blacksquare}, \Box, \blacksquare, \circ, \bullet, \textcolor{gray}{\bullet}, \triangle, \blacktriangle, \textcolor{gray}{\blacktriangle}, \bigtriangleup, \blacktriangle\} \to \{\square, \blacksquare, \textcolor{gray}{\blacksquare}, \Box, \blacksquare, \circ, \bullet, \textcolor{gray}{\bullet}, \triangle, \blacktriangle, \textcolor{gray}{\blacktriangle}, \bigtriangleup, \blacktriangle\}$ sei die Funktion, die jedes schwarze Symbol auf das entsprechende weiße, jedes weiße auf das entsprechende schwarze, und jedes graue auf sich selbst abbildet.

c) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 3x + 5$

d) $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 3x + 5$

e) $f\colon \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ die Funktion, die durch folgende Wertetabelle definiert ist:

x	a	b	c	d	e
$f(x)$	3	5	2	4	2

Aufgabe 2. Sei $f\colon A \to B$ eine Funktion. Zeigen Sie: f ist genau dann injektiv, wenn für alle Mengen X und alle Funktionen $g, h\colon X \to A$ gilt $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$.

Aufgabe 3. Diese Aufgabe ist schriftlich zu bearbeiten.

a) Sei A eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Zeigen Sie: Es gibt eine Menge B und eine Funktion $f\colon A \to B$, so dass $\forall\, a, b \in A : a \sim b \iff f(a) = f(b)$.

b) Nach Satz 6 hat jede Funktion $f\colon A \to B$ eine Zerlegung $f = h \circ g$, bei der g surjektiv und h injektiv ist. Kann man auch für jedes f eine Zerlegung $f = h \circ g$ finden, bei der g injektiv und h surjektiv ist? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 4. Sei $G = \mathbb{Z}_{13} \setminus \{[0]_{\equiv_{13}}\}$.

a) Zeigen Sie, dass durch $\cdot\colon G \times G \to G$, $[x]_{\equiv_{13}} \cdot [y]_{\equiv_{13}} := [xy]_{\equiv_{13}}$ eine Verknüpfung auf G definiert wird. (Hier ist die Repräsentantenunabhängigkeit zu überprüfen.)

b) Zeigen Sie, dass G zusammen mit der Verknüpfung aus a) eine Gruppe bildet.

c) Zeigen Sie, dass die Gruppen $(G, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ zueinander isomorph sind.

d) Bestimmen Sie alle Untergruppen von $(G, \cdot)$ und alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.

Aufgabe 5. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und H eine Untergruppe von G.

a) Zeigen Sie: Durch $g_1 \sim g_2 \iff \exists\, h \in H : g_1 = h \circ g_2$ wird auf G eine Äquivalenzrelation erklärt.

b) Geben Sie für $(G, \circ) = (\mathbb{Z}_{12}, +)$ und $H = \{[0]_{\equiv_{12}}, [4]_{\equiv_{12}}, [8]_{\equiv_{12}}\}$ die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation aus a) an.

c) Geben Sie für $(G, \circ) = (S_6, \circ)$ und $H = \{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \}$ die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation aus a) an.