Übungsblatt 2

Besprechung am **16.10.2017**

Aufgabe 1 (Mengen) Zeigen Sie allgemein für Mengen A, B, C, D, oder widerlegen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels:

a) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

b) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

c) $A \subseteq B \Longrightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

Aufgabe 2 (Halbordnungen) Gegeben seien Halbordnungen $\leq_A, \leq_B$ auf den Mengen A, B. Eine Relation $\leq$ auf $A \times B$ ist definiert durch:

$$\forall\, (a, b)\,, (c, d) \in A \times B : [(a, b) \leq (c, d) :\Longleftrightarrow (a \neq c \wedge a \leq_A c) \vee (a = c \wedge b \leq_B d)]$$

Zeigen Sie:

a) $\leq$ ist eine Halbordnung

b) Falls $\leq_A, \leq_B$ Totalordnungen sind, dann ist auch $\leq$ total

Aufgabe 3 (Relationen) Eine Relation $\sim$ auf der Menge $A := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist definiert durch:

$$\forall\, (a, b)\,, (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} : [(a, b) \sim (c, d) :\Longleftrightarrow ad = bc]$$

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A ist.

b) Geben Sie 3 verschiedene Elemente der Äquivalenzklasse $[(2, 3)]_\sim$ an.

c) Welche wohlbekannten Zahlen verbergen sich hinter $A/\!\sim$?

Aufgabe 4 (Äquivalenzrelationen) Sei A eine Menge und $\sim_1, \sim_2$ Äquivalenzrelationen auf A. Zeigen Sie allgemein, oder widerlegen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels:

a) $\sim_1 \cup \sim_2$ ist eine Äquivalenzrelation auf A

b) $\sim_1 \cap \sim_2$ ist eine Äquivalenzrelation auf A

Aufgabe 5 (Relationen) Welche der folgenden Relationen R sind Äquivalenzrelationen bzw. Halbordnungen auf der Menge M? Welche sind total?

a) $M = \mathcal{P}(S)$. $\forall A_1 \subseteq S, A_2 \subseteq S : A_1 R A_2 :\Longleftrightarrow \exists f : A_1 \longrightarrow A_2$, f ist bijektiv

b) $M = \{f \mid \exists A \subseteq \mathbb{R} : f : A \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ist eine Funktion}\}$. Ist $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Element der Menge M, dann heißt A Definitionsbereich von f und wird mit $\mathrm{Def}(f)$ bezeichnet.
$\forall f, g \in M : [fRg :\Longleftrightarrow \mathrm{Def}(f) \subseteq \mathrm{Def}(g) \wedge \forall x \in \mathrm{Def}(f) : f(x) \leq g(x)]$, wobei $\leq$ die gewöhnliche Ordnung auf $\mathbb{R}$ ist.