

Name (deutlich lesbar!)

k

Matrikelnummer

- Es sind keine anderen Hilfsmittel als ein Stift zugelassen, insbesondere keine Unterlagen und keine elektronischen Geräte. Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus.
- Die Antworten zu Aufgabe 1 sind auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Notieren Sie die Antworten für die weiteren Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten leeren Papier. Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und legen Sie bei der Abgabe die Blätter in der Reihenfolge der Aufgaben zusammen, mit dem Aufgabenblatt als Deckblatt. Die abgegebenen Blätter werden oben links zusammengetackert. Halten Sie deshalb beim Schreiben genügend Abstand zu dieser Ecke.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Sie können die Teilnahme an der Klausur jederzeit ohne Abgabe einer Lösung beenden. Ein solcher Abbruch wird nicht als Fehlversuch gewertet.

Aufgabe 1. Wahr oder falsch?

	wahr	falsch
Jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert der Abbildung $D: C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $D(f) = f'$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Zu jedem Skalarprodukt auf $\mathbb{R}[X]$ gibt es eine passende ONB	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Durch $p \sim q \iff \gcd(p, q) = 1$ wird auf $\mathbb{K}[X]$ eine Äquivalenzrelation erklärt	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
\mathbb{C} ist algebraisch abgeschlossen	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Wenn sowohl A als auch B von p annihiliert werden, dann auch $A + B$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$h: V \rightarrow V$ hat k verschiedene Eigenwerte $\Rightarrow \dim(V) \leq k$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Die Summe zweier A -invarianter Unterräume ist A -invariant	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ist p das charakteristische Polynom von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, so gilt $\deg(p) = n$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Für jedes Skalarprodukt $\langle \cdot \cdot \rangle$ ist $\ x\ := \sqrt{\langle x x \rangle}$ eine Norm	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt: AA^\top ist diagonalisierbar	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Jeder torsionsfreie Modul ist frei.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Der Strassen-Algorithmus ist nur von theoretischem Interesse.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

Aufgabe 2.

- a) Berechnen Sie die Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & 7 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4 \times 4}$.
- b) Konstruieren Sie eine Matrix $M \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}$ mit Minimalpolynom $(X - 1)^2$ und dem Eigenraum $E_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.
- c) Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Unterraum, und M die Menge aller linearen Abbildungen $h: V \rightarrow V$, die einen Eigenraum haben, der U enthält. Zeigen Sie: M ist ein Unterraum von $\text{Hom}(V, V)$.

Lösung.

- a) Charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4-X & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 3-X & 7 & -3 \\ 1 & 0 & -1-X & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -X \end{vmatrix} &= (3-X) \begin{vmatrix} 4-X & -4 & 0 \\ 1 & -1-X & 0 \\ 1 & 0 & -1-X \end{vmatrix} \\ &= (3-X)(-X) \begin{vmatrix} 4-X & -4 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix} \\ &= (X-3)X((4-X)(-1-X)+4) \\ &= (X-3)X(-4-4X+X+X^2+4) \\ &= (X-3)X(X^2-3X) = (X-3)^2 X^2. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also 0 und 3 (jeweils doppelt).

- b) Die Jordannormalform muss $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ lauten. Wir können eine Jordanbasis B wählen, indem wir den Eigenraum zu einer Basis von \mathbb{Q}^2 ergänzen. Zum Beispiel $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Für die gesuchte Matrix A gilt dann $B^{-1}AB = J$, d.h. $A = BJB^{-1}$. Wegen $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- c) Die Nullabbildung hat V als Eigenraum zum Eigenwert 0, gehört also zu M . Seien nun $h_1, h_2 \in M$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$. Zu zeigen: $\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 \in M$. Wegen $h_1, h_2 \in M$ gibt es $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, so dass der Eigenraum E_i von h_i zum Eigenwert λ_i den Raum U enthält ($i = 1, 2$). Wir zeigen, dass jedes $u \in U$ ein Eigenvektor von $\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2$ zum Eigenwert $\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2$ ist. In der Tat gilt $(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2)(u) = \alpha_1 h_1(u) + \alpha_2 h_2(u) = \alpha_1 \lambda_1 u + \alpha_2 \lambda_2 u = (\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2)u$ für jedes $u \in U$. Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 3.

- a) Seien $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Zeigen Sie, dass $x \mapsto Ax$ eine Projektion und $x \mapsto Bx$ eine Isometrie ist.
- b) Seien V ein \mathbb{R} -Vektorraum, $v \in V \setminus \{0\}$ fix, und $\langle \cdot | \cdot \rangle_1, \langle \cdot | \cdot \rangle_2: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Skalarprodukte auf V . Zeigen oder widerlegen Sie: Dann wird auch durch $\langle x | y \rangle := \langle x | v \rangle_1 \langle v | y \rangle_2$ ein Skalarprodukt auf V erklärt.
- c) Zeigen oder widerlegen Sie: Zu jeder Projektion $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt es ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n , bezüglich dem h eine Orthogonalprojektion ist.

Lösung.

- Durch Nachrechnen überprüft man $A^2 = A$ und $B^\top B = I_3$.
- Falsch. Linearität ist zwar immer erfüllt, Positivdefinitheit und Symmetrie aber nicht unbedingt. Zum Beispiel $V = \mathbb{R}^2$ mit $\langle \cdot | \cdot \rangle_1$ und $\langle \cdot | \cdot \rangle_2$ beide das Standardskalarprodukt und $v = (1, 0)$. Dann gilt $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0$, obwohl $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nicht der Nullvektor ist.
- Für jede Projektion $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt $\mathbb{R}^n = \ker h \oplus \text{im } h$. Es gibt also eine geordnete Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von \mathbb{R}^n , die nur Elemente aus $\ker h$ oder $\text{im } h$ enthält. Es genügt ein Skalarprodukt zu konstruieren, für das $\ker h \perp \text{im } h$ gilt. Dazu kann man $\langle b_i | b_j \rangle = \delta_{i,j}$ für alle i, j definieren. Das liefert ein Skalarprodukt, und es gilt $\ker h \perp \text{im } h$, wie gefordert.

Aufgabe 4. Sei M ein \mathbb{Z} -Modul.

- Zeigen Sie: Wenn M ein Torsionsmodul ist, gilt $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \{0\}$.
- Zeigen Sie: Wenn M endlich erzeugt ist, gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ und einen Untermodul $N \subseteq \mathbb{Z}^n$ mit $M \cong \mathbb{Z}^n / N$. (Hinweis: Homomorphiesatz.)
- Sei nun $M = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{Z}^4$. Bestimmen Sie $k, e_1, \dots, e_m \in \mathbb{N}$ so dass $\mathbb{Z}^4 / M \cong \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}_{e_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{e_m}$.

Lösung.

- Sei $m \otimes \frac{p}{q} \in M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ beliebig. Da M ein Torsionsmodul ist, gibt es ein $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $rm = 0$. Daraus folgt $m \otimes \frac{p}{q} = m \otimes \frac{rp}{rq} = r(m \otimes \frac{p}{rq}) = (rm) \otimes \frac{p}{rq} = 0 \otimes \frac{p}{rq} = 0$. Da jedes Element aus $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ eine \mathbb{Z} -Linearkombination von Elementen der Form $m \otimes \frac{p}{q}$ ist, folgt die Behauptung.
- Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ ein Erzeugendensystem von M . Betrachte den Homomorphismus $h: \mathbb{Z}^n \rightarrow M$ mit $h(e_i) = b_i$ ($i = 1, \dots, n$). Nach dem Homomorphiesatz gilt $\mathbb{Z}^n / \ker h \cong \text{im } h = M$, wir können also $N = \ker h$ wählen.
- Wir berechnen zunächst eine Smith-Normalform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\leftarrow -3 \quad + \\ \leftarrow + \quad + \\ \leftarrow + \quad +}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-1 \mid \cdot (-1) \\ \leftarrow +}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{+ \\ \leftarrow + \quad +}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{+ \\ \leftarrow + \quad +}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt $\mathbb{Z}^4 / M \cong \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}_3$.