Übungsblatt 13

Besprechung am **25.06.2018**

Aufgabe 1. Vervollständigen Sie die folgende Variante des Strassen-Algorithmus. Wir verwenden dabei die Notation aus dem Skriptum.

$$
\begin{aligned}
M_1 &= A_{1,1}B_{1,1} & M_2 &= (A_{2,1}+A_{2,2})(-B_{1,1}+B_{1,2})\\
M_3 &= (A_{1,1}-A_{2,1})(-B_{1,2}+B_{2,2}) & M_4 &= A_{2,2}(-B_{1,1}+B_{2,1}+B_{1,2}-B_{2,2})\\
M_5 &= (A_{1,1}+A_{1,2}-A_{2,1}-A_{2,2})B_{2,2} & M_6 &= (-A_{1,1}+A_{2,1}+A_{2,2})(B_{1,1}-B_{1,2}+B_{2,2})\\
M_7 &= A_{1,2}B_{2,1} & &\\
C_{1,1} &= M_1+M_7 & &\\
C_{1,2} &= M_1+M_2+M_5+M_6 & &\\
C_{2,1} &= ?\,M_1+?\,M_2+?\,M_3+?\,M_4+?\,M_5+?\,M_6+?\,M_7 & &\\
C_{2,2} &= M_1+M_2+M_3+M_6 & &
\end{aligned}
$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie Sie die gesuchten Koeffizienten mit einem linearen Gleichungssystem berechnen können. Zur Lösung des Gleichungssystems können Sie ein Computeralgebrasystem verwenden.

Aufgabe 2. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$

b) $\kappa(A+B) \le \kappa(A)+\kappa(B)$

c) $\kappa(AB) \le \kappa(A)\kappa(B)$

d) $\kappa(\lambda A) = \lambda\kappa(A)$ (falls $\lambda \neq 0$)

e) $\kappa(A^{-1}) = 1/\kappa(A)$

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass $\|I_n - A\| < 1$ ist.

a) Zeigen Sie, dass die Summe $\sum_{k=0}^{\infty}(I_n - A)^k$ konvergiert, und dass $A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(I_n - A)^k$ gilt.

b) Für $K \in \mathbb{N}$ sei $P_K = \sum_{k=0}^{K}(I_n - A)^k$. Zeigen Sie, dass das Richardson-Verfahren auf dem vorkonditionierten System $P_K Ax = P_K b$ (mit einem hinreichend groß gewählten K) schneller konvergiert als auf dem System $Ax = b$.

c) Nehmen Sie an, die Matrix-Vektor-Multiplikation Ax für gegebenes $x \in \mathbb{R}^n$ kostet c Operationen. Wie viele Operationen braucht man dann für die Matrix-Vektor-Multiplikation $P_K x$? Was bedeutet das für die Eignung von P_K als Vorkonditionierer?

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Lösung $x \in \mathbb{Q}(X)^2$ des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 3X+1 & X-1 \\ X+1 & 2X+3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} X \\ 3 \end{pmatrix},$$

indem Sie für X einige Werte aus $\mathbb{Q}$ einsetzen und die entsprechenden Gleichungssysteme über $\mathbb{Q}$ lösen und danach die verschiedenen Lösungen zur gesuchten Lösung in $\mathbb{Q}(X)^2$ zusammensetzen.

Aufgabe 5. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

a) Das charakteristische Polynom von A lässt sich mit $\mathrm{O}(n^4)$ Operationen in $\mathbb{K}$ berechnen.

b) Das Minimalpolynom von A lässt sich mit $\mathrm{O}(n^4)$ Operationen in $\mathbb{K}$ berechnen.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass $\mathbb{K}$ ein unendlicher Körper ist.