Übungsblatt 12

Besprechung am **18.06.2018**

Aufgabe 1 a) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Finden Sie ein $p \in \mathbb{K}[X]$, sodass $p(2) = 11, p(-1) = 2, p(-3) = 6$ gilt.

b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}$, sodass $x \equiv_3 2, x \equiv_5 1, x \equiv_7 2$ gilt.

Aufgabe 2 Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Zeigen Sie:

a) $(x - \omega).(x - \omega^2)..(x - \omega^n) = x^n - 1$

b) $1.\omega.\omega^2..\ \omega^{n-1} = (-1)^{n-1}$

c) $(1 + \omega)(1 + \omega^2)..(1 + \omega^{n-1}) = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ 1 & n \text{ ungerade} \end{cases}$

d) Für $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ist ω^k genau dann eine primitive n-te Einheitswurzel, wenn $\gcd(k, n) = 1$ gilt.

Aufgabe 3 Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper und $U(n) := \{x \in \mathbb{K} \mid x^n = 1\}$ für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Zeigen Sie:

a) $(U(n), \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{K}\backslash\{0\}, \cdot)$.

b) $m|n \Rightarrow U(m) \subseteq U(n)$. Gilt auch die Umkehrung?

c) $|U(n)| \leq n$, wobei $|U(n)| = n$ gilt, wenn $\mathbb{K}$ eine primitive n-te Einheitswurzel besitzt.

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass die Matrix-Vektor-Multiplikation $A \cdot x$ für eine Hankel- Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und einen Vektor $x \in \mathbb{C}^n$ mit nur $O(n. \log n)$ Operationen in $\mathbb{C}$ durchgeführt werden kann. (Hinweis: Führen Sie das Problem auf eine Polynommultiplikation zurück.)

Aufgabe 5 Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeigen Sie für $\omega \in \mathbb{R}, \omega \geq 2$:

a) (schriftliche Abgabe) Falls die Multiplikation zweier $n \times n$ Matrizen, $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$, mit Einträgen in $\mathbb{K}$ mit $O(n^\omega)$ Operationen möglich ist, dann kann für alle $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$, eine Treppenform mit $O(n^\omega)$ Operationen berechnet werden.

b) Wenn für alle $A \in \mathbb{K}^{n \times n}, n \geq 1$, eine Treppenform für A mit $O(n^\omega)$ Operationen berechnet werden kann, dann ist auch die Multiplikation zweier $n \times n$ Matrizen, $n \geq 1$, mit $O(n^\omega)$ Operationen möglich.