k

Name (deutlich lesbar!) Matrikelnummer

Aufgabe 1. Seien $U_1 = \langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\2\end{pmatrix} \rangle$ und $U_2 = \langle \begin{pmatrix}35482\\85407\\37827\\-5063\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3020\\-20799\\12587\\65107\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}89424\\132226\\84099\\25322\end{pmatrix} \rangle$.

Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass $U_1 \subseteq U_2$ gilt. Zeigen Sie: Es gibt keinen Untervektorraum $W \subseteq \mathbb{R}^4$ mit $U_1 \subsetneq W \subsetneq U_2$.

Lösung. Offensichtlich ist das angegebene Erzeugendensystem von U_1 linear unabhängig. Deshalb gilt $\dim(U_1) \geq 2$. Es ist ebenfalls offensichtlich, dass $\dim(U_2) \leq 3$ gilt, weil das angegebene Erzeugendensystem nur drei Elemente hat. Für jeden Untervektorraum W mit $U_1 \subseteq W \subseteq U_2$ muss deshalb $2 \leq \dim(W) \leq 3$ gelten, d.h. $\dim(W) = 2$ oder $\dim(W) = 3$. Im einen Fall gilt $W = U_1$, im anderen $W = U_2$. Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 2. Der $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum $\mathbb{Z}_2^2$ hat genau drei Basen. Wie lauten sie?

Lösung. $\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\}$, $\{\binom{1}{0}, \binom{1}{1}\}$, $\{\binom{0}{1}, \binom{1}{1}\}$.