

Übungsblatt 6

Besprechung am 30.04.2018

Aufgabe 1 Sei V ein Vektorraum und $h: V \rightarrow V$ eine Projektion.

- Zeigen Sie, dass $g = \text{id}_V - h$ eine Projektion ist.
- Wie hängen $\ker g$ und $\text{im } g$ mit $\ker h$ und $\text{im } h$ zusammen? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Gilt für zwei beliebige Projektionen $h, g: V \rightarrow V$, dass $h + g$ und hg Projektionen sind? Beweis oder Gegenbeispiel.

Aufgabe 2 Sei $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $\ker A = \{0\}$. Zeigen Sie:

- Die Matrix $a(a^\top a)^{-1}a^\top$ ist die Abbildungsmatrix (bzgl. der Standardbasis) der Orthogonalprojektion auf $\langle a \rangle$.
- $A^\top A$ ist invertierbar.
Zeigen Sie zum Beispiel $\ker A^\top A = \ker A$ oder verwenden Sie eine Singulärwertzerlegung von A .
- Für $P = A(A^\top A)^{-1}A^\top$ gilt $P^2 = P$.
- Es gilt $P^\top = P$.
- P ist die Abbildungsmatrix (bzgl. der Standardbasis) der Orthogonalprojektion auf $\text{im } A$.

Aufgabe 3 Sei $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ und $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, h(x) = Ax$.

- Zeigen Sie, dass h eine Isometrie ist.
- Bestimmen Sie die Eigenräume der reellen Eigenwerte von A . Welche geometrische Bedeutung haben diese Eigenräume?
- Konstruieren Sie eine orthogonale Matrix $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, so dass $B^\top A B$ die Form

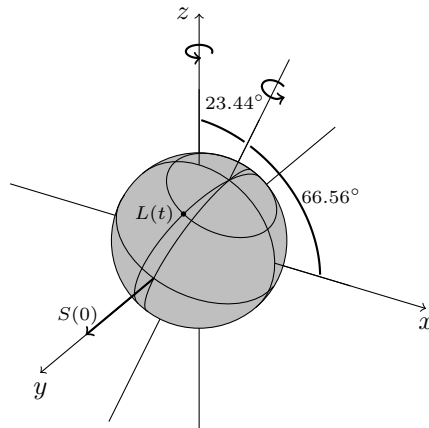
$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

für geeignetes $\phi \in \mathbb{R}$ hat.

Verwenden Sie dazu, dass A über \mathbb{C} diagonalisierbar ist oder ergänzen Sie die Eigenvektoren von A zu einer Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 .

Aufgabe 4 In diesem Jahr fand der Frühlingsanfang am 20.03. um 18:15 MESZ statt. An diesem Tag war der Sonnenhöchststand in Linz (48°18'N) um 13:10 MESZ. Berechnen Sie eine grobe Näherung für den Zeitpunkt des Sonnenaufgangs in Linz am 30.04.2018.

Anleitung: Wählen Sie den Erdmittelpunkt als Ursprung des \mathbb{R}^3 und die (x, y) -Ebene als Ekliptik (also als die Ebene, in der die Erde um die Sonne kreist). Auch wenn es seit einigen Jahrhunderten nicht mehr modern ist, ist es zweckmäßig, in dieser Aufgabe die Sonne um die Erde kreisen zu lassen. Diese Bewegung ist dann eine Rotation um die z -Achse und dauert 365.2564 Tage (ein sidirisches Jahr). Die Rotation der Erde um sich selbst hat eine Drehachse, die um 23.44° von der z -Achse weg geneigt ist, etwa in Richtung der positiven x -Achse. Eine Umdrehung der Erde um diese Achse dauert 23h56m4s, also 0.99727 Tage (ein sidirischer Tag). Wenn die Erdachse in Richtung der x -Achse geneigt ist, die Erde also innerhalb der (x, z) -Ebene gedreht, dann steht die Sonne am Frühlingsanfang senkrecht auf dieser (x, z) -Ebene.



Wenn $S(t)$ die Position der Sonne zum Zeitpunkt t ist, und wenn $X(t)$ ein sich mit der Erde mitdrehender Punkt auf der Erdoberfläche ist, dann findet in diesem Punkt ein Sonnenaufgang oder -untergang zu den Zeiten t statt, an denen $S(t) \perp X(t)$ gilt, und ein Sonnenhöchststand tritt ein, wenn $\langle S(t) | X(t) \rangle$ maximal wird. (Warum ist das so?) Mit diesen astromischen Informationen und dem angegebenen Breitengrad von Linz können Sie die Position $L(t)$ von Linz für jeden Zeitpunkt t berechnen. Zur Maximierung von trigonometrischen Funktionen können Sie den Mathematica-Befehl `Maximize` verwenden. Achten Sie darauf, dass beide Drehbewegungen richtig orientiert sind. Die Länge der Vektoren $S(t)$, $L(t)$ ist übrigens unerheblich, solange sie unabhängig von t ist. Zur Berechnung der Nullstellen von $t \mapsto \langle S(t) | L(t) \rangle$, also der Zeitpunkte t von Sonnenauf- und untergängen, können Sie den Mathematica-Befehl `FindRoot` verwenden. Ihre Vorhersagen müssten für Sonnenaufgänge einige Minuten später und für Sonnenuntergänge einige Minuten früher liegen als die tatsächlichen Zeitpunkte. Das liegt zum einen an unberücksichtigten astronomischen und atmosphärischen Effekten und zum anderen daran, dass die offizielle Definition von Sonnenauf- und -untergang sich auf die Oberkante der Sonnenscheibe bezieht, während die hier beschriebene Vorgehensweise sich auf den Sonnenmittelpunkt bezieht.

Aufgabe 5 (Diese Aufgabe ist schriftlich abzugeben.) Zeigen oder widerlegen Sie:

- Wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit ist, dann ist jeder Eigenwert auch ein Singulärwert von A und umgekehrt ist jeder Singulärwert ein Eigenwert von A .
- Wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und invertierbar ist und jeder Eigenwert ein Singulärwert von A ist, dann ist A positiv definit.
- Wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und invertierbar ist und jeder Singulärwert ein Eigenwert von A ist, dann ist A positiv definit.
- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und (U, Σ, V) eine Singulärwertzerlegung von A . Dann bilden die Spalten von U eine ONB aus Eigenvektoren von AA^T und die Spalten von V eine ONB aus Eigenvektoren von $A^T A$.