Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2 **Sommersemester 2018**

Übungsblatt 5

Besprechung am **23.04.2018**

Aufgabe 1. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit, so ist auch $A + B$ positiv definit.

b) Durch $A \geq B :\iff A - B$ positiv semidefinit wird auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ eine Halbordnung definiert.

c) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Matrix $xx \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv semidefinit.

d) Auf der Diagonalen einer positiv definiten Matrix können nur positive Einträge stehen.

Aufgabe 2. Sei $p = 6X^4 - 6X^3Y + 14X^2Y^2 - 10XY^3 + 13Y^4 \in \mathbb{R}[X, Y]$.

a) Zeigen Sie: $\forall\, x, y \in \mathbb{R} : p(x, y) \geq 0$.

Hinweis: Konstruieren Sie eine symmetrische positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit der Eigenschaft $p = (X^2, XY, Y^2)A(X^2, XY, Y^2)$.

b) Finden Sie eine Darstellung von p als Summe von Quadraten.

Hinweis: Berechnen Sie eine Cholesky-Zerlegung der Matrix A aus Teil a). Sie dürfen dafür ein Computeralgebrasystem verwenden.

Aufgabe 3. In der Vorlesung wurde Positiv-Definitheit nur für symmetrische Matrizen definiert. Allgemeiner kann man für beliebige Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definieren, dass A positiv definit ist, falls $xAx > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig. Zeigen Sie:

a) A ist genau dann positiv definit wenn $\frac{1}{2}(A + A^\top)$ positiv definit ist.

b) Wenn A positiv definit ist, sind alle (reellen) Eigenwerte von A positiv.

Aufgabe 4. Zeigen Sie:

a) Die Menge $\{\cos(nx) : n \in \mathbb{N}\}$ ist ein OS bezüglich des Skalarprodukts $\langle f|g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx$.

b) Die Menge $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist ein OS bezüglich des Skalarprodukts $\langle p|q\rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} p(x)q(x)dx$.

Hinweis: Führen Sie die Aussage auf Teil a) zurück. Sie dürfen dabei die Formel $T_n(\cos x) = \cos(nx)$ als bekannt voraussetzen. (Die Formel lässt sich leicht aus den Additionstheoremen für sin und cos und der Rekurrenz für T_n herleiten; wir ersparen Ihnen die dazu nötige Rechnerei.)

Aufgabe 5. Berechnen Sie eine ONB von $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle x|y\rangle = x\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}y$.