Übungsblatt 8

Besprechung am **14.05.2018**

Aufgabe 1 Mit $\mathbb{C}^*$ bezeichnen wir die von 0 verschiedenen komplexen Zahlen.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}^*$ mit der üblichen Multiplikation eine abelsche Gruppe bildet.

b) Betrachten Sie ferner die Abbildung von $\mathbb{Z} \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, welche (n, z) auf z^n abbildet. Zeigen Sie, dass damit auf der multiplikativen Gruppe $\mathbb{C}^*$ ein $\mathbb{Z}-$ Modul definiert wird.

c) Zeigen Sie, dass durch die Abbildung von $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche (n, r) auf nr (übliche Multiplikation) abbildet, ein $\mathbb{Z}-$Modul auf der additiven Gruppe von $\mathbb{R}$ definiert wird.

d) Zeigen Sie, dass die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, mit $h(r) = e^{ir}$, ein Homomorphismus zwischen den oben definierten $\mathbb{Z}-$Moduln ist.

e) Bestimmen Sie $\ker h$ und $im\ h$.

f) Zeigen Sie, dass $\{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$ ein zu $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ isomorpher Untermodul von $\mathbb{C}^*$ ist. Dabei sollen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}^*$ wieder, wie oben, als $\mathbb{Z}-$Moduln betrachtet werden.

Aufgabe 2 Welche der folgenden $\mathbb{Z}-$Moduln (mit der Moduloperation aus Bsp. 3, Seite 253) sind frei? Bestimmen Sie gegebenenfalls eine Basis.

a) $(\mathbb{Z}[X], +)$

b) $(\mathbb{R}, +)$

c) $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$, wobei $\mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ ist.

d) $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, wobei $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ist.

Aufgabe 3 Sei R ein Ring, M ein $R-$Modul und $m \in M$. Zeigen Sie:

a) $R/Ann(m) \cong Rm$ als $R-$Moduln, wobei $Ann(m) := \{r \in R \mid rm = 0\}$ ist. (Hinweis: Betrachten Sie Satz 125)

b) Für relativ prime Zahlen $k, l \in \mathbb{N}$ gilt $\langle(1, 1)\rangle = \mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_l$ und $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_l \cong \mathbb{Z}_{kl}$.

Aufgabe 4 Für eine Primzahl p sei $M_p := \{x + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \mid x = z/p^k \text{ für ein } z \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie:

a) M_p ist ein Untermodul von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

b) M_p ist ein Torsionsmodul.

c) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $x_n := 1/p^n + \mathbb{Z}$. Dann gilt $\langle x_n\rangle \subseteq \langle x_{n+1}\rangle$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \langle x_n\rangle = M_p$.

d) Für jeden endlich erzeugbaren Untermodul U von M_p gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $U = \langle x_n\rangle$ gilt.

Aufgabe 5 Sei M ein $\mathbb{Z}-$Modul. Zeigen oder widerlegen Sie für Untermoduln N_1, N_2 von M.

a) Wenn N_1, N_2 Torsionsmoduln sind, dann auch $N_1 + N_2$ und $N_1 \cap N_2$.

b) Wenn N_1, N_2 torsionsfrei sind, dann auch $N_1 + N_2$ und $N_1 \cap N_2$.

c) Wenn N_1, N_2 frei und endlich erzeugt sind, dann auch $N_1 + N_2$ und $N_1 \cap N_2$.