Übungsblatt 7

Besprechung am **07.05.2018**

Aufgabe 1 Berechnen Sie (händisch) eine Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^\top$ für die Matrix

$$A = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 39 & 42 & -6 \\ -26 & -67 & 82 \end{pmatrix}.$$

Sind die Matrizen U, Σ, V eindeutig bestimmt?

Aufgabe 2 Sei M ein Modul über einem Ring R. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $A \cap B$ ist der größte Untermodul von M, der Untermodul von A und von B ist.

b) $A + B$ ist der kleinste Untermodul von M, der sowohl A als auch B als Untermoduln enthält.

c) Für jedes $r \in R$ gilt, dass $h_r : M \to M$, definiert durch

$$h_r(m) = r \cdot m$$

ein Endomorphismus von M ist.

Aufgabe 3 Sei M ein Modul über einem Ring R, und sei A_n ein Untermodul von M, für jedes $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots .$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ist ebenfalls ein Untermodul von M.

b) Wenn M endlich erzeugt ist, dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $A_{n_0} = A_{n_0+1} = A_{n_0+2} = A_{n_0+3} = \dots$.

Aufgabe 4 Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $h : V \to V$ eine lineare Abbildung. Für $p \in \mathbb{K}[X]$ und $v \in V$ definieren wir durch $p \cdot v = p(h)(v)$ eine Multiplikation. Zeigen Sie

a) Durch diese Multiplikation wird auf der additiven Gruppe von V ein $\mathbb{K}[X]$-Modul definiert.

b) Eine Teilmenge von V bildet genau dann einen $\mathbb{K}[X]$-Modul (gemäß obiger Definition), wenn sie ein h-invarianter Unterraum ist.

c) Sei konkret h definiert durch

$$h(v) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} v.$$

Finden Sie eine Zerlegung von V als direkte Summe von fünf $\mathbb{K}[X]$-Moduln, von denen jeder durch ein einziges Element erzeugt werden kann. Geben Sie die erzeugenden Vektoren jeweils an.

Aufgabe 5 Sei M ein Modul über einem kommutativen Ring R. Wir definieren

$$A = \{a \in R \mid \forall m \in M : a \cdot m = 0\}.$$

a) Zeigen Sie, dass A ein Ideal von R ist.

b) Definieren Sie auf der additiven Gruppe von M eine Modulstruktur über dem Ring R/A.

c) Bestimmen Sie das Ideal A konkret für den in Aufgabe 4c definierten Modul.