Lineare Algebra und Analytische Geometrie I · Winter 2017/18 06.04.2018

Zweite Klausur

	k							
Name (deutlich lesbar!)		Matrikelnummer						

- Es sind keine anderen Hilfsmittel als ein Stift zugelassen, insbesondere keine Unterlagen und keine elektronischen Geräte. Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus.
- Die Antworten zu Aufgabe 1 sind auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Notieren Sie die Antworten für die weiteren Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten weissen Papier. Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und legen Sie bei der Abgabe die Blätter in der Reihenfolge der Aufgaben zusammen, mit dem Aufgabenblatt als Deckblatt. Die abgegebenen Blätter werden oben links zusammengetackert. Halten Sie deshalb beim Schreiben genügend Abstand zu dieser Ecke.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Sie können die Teilnahme an der Klausur jederzeit ohne Abgabe einer Lösung beenden. Ein solcher Abbruch wird nicht als Fehlversuch gewertet.

Aufgabe 1. Wahr oder falsch?

	wahr	falsch
Eine Funktion $f\colon \{1,2,3,4\} \to \{5,6,7\}$ kann nicht surjektiv sein	☐	☒
$\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$ hat eine Untergruppe, die isomorph zu $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$ ist	☒	☐
Jede Teilmenge einer linear abhängigen Menge ist linear abhängig	☐	☒
Sind B_1, B_2 zwei Basen von V, so gilt $B_1 = B_2$ oder $B_1 \cap B_2 = \emptyset$	☐	☒
Die Menge aller Polynome vom Grad 5 bildet einen Unterraum von $\mathbb{K}[X]$	☐	☒
Ist e_i der i-te Einheitsvektor, so ist Ae_i die i-te Zeile von A	☐	☒
Für alle $h\colon V \to W$ gilt h ist surjektiv $\iff$ $\ker h \neq \{0\}$	☐	☒
Ist $h\colon V \to W$ linear und U ein Unterraum von W, so ist $h^{-1}(U)$ ein Unterraum von V	☒	☐
Die Abbildung $H\colon C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$, $H(f)(x) = f(x^2)$ ist linear	☒	☐
$V/(U/W) \cong (V \times W)/U$	☐	☒
Zu jedem Unterraum $U \subseteq V$ gibt es genau einen Komplementärraum W	☐	☒
$\mathbb{R}$ ist als $\mathbb{Q}$-Vektorraum unendlich-dimensional	☒	☐

Aufgabe 2. Zur Erinnerung: Die Menge $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ aller invertierbaren Matrizen der Größe $n \times n$ mit Einträgen im Körper $\mathbb{K}$ bildet mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe.

a) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ fix und $G_A = \{(P,Q) \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})^2 : PAQ^{-1} = A\}$. Zeigen Sie, dass diese Menge mit der Verknüpfung $(P_1,Q_1) * (P_2,Q_2) = (P_1P_2, Q_1Q_2)$ eine Gruppe bildet.

b) Zeigen Sie: Ist $(P,Q) \in G_A$ und $U \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ beliebig, so ist auch $(UPU^{-1}, UQU^{-1}) \in G_{UAU^{-1}}$.

c) Zeigen Sie, dass die Gruppe G_{I_n} isomorph zu $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ ist.

Lösung.

a) Assoziativität überträgt sich von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$. Das Neutralelement ist (I_n, I_n), was in G_A liegt, weil sicher $I_nAI_n^{-1} = A$ gilt. Offenbar ist $(P,Q)^{-1} = (P^{-1},Q^{-1})$, und dieses Element gehört zu G_A, denn ist $(P,Q) \in G_A$, so gilt $PAQ^{-1} = A \Rightarrow A = P^{-1}A(Q^{-1})^{-1}$, also $(P^{-1},Q^{-1}) \in G_A$. Bleibt zu zeigen, dass mit $(P_1,Q_1),(P_2,Q_2) \in G_A$ auch $(P_1P_2, Q_1Q_2) \in G_A$ gilt. Das folgt aus $P_1P_2A(Q_1Q_2)^{-1} = P_1P_2AQ_2^{-1}Q_1^{-1} = P_1AQ_1^{-1} = A$.

b) $PAQ^{-1} = A \Rightarrow UPAQ^{-1}U^{-1} = UAU^{-1} \Rightarrow UP(U^{-1}U)A(U^{-1}U)Q^{-1}U^{-1} = UAU^{-1}$
$\Rightarrow (UPU^{-1})(UAU^{-1})(UQU^{-1})^{-1} = UAU^{-1}$.

c) Im Fall $A = I_n$ gilt $(P,Q) \in G_A \iff PI_nQ^{-1} = I_n \iff P = Q$, also ist $G_A = \{(P,P) : P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})\}$. Ein Gruppenisomorphismus ist also z.B. $h\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \to G_{I_n}$, $h(P) = (P,P)$.

Aufgabe 3. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$.

a) Berechnen Sie Basen von $\ker A$ und $\operatorname{im} A$.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $h\colon \mathbb{Q}^5 / \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle \to \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$, $h(x) = Ax$ wohldefiniert ist.

c) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Abbildung aus Teil b) ein Isomorphismus ist.

Lösung.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad | \cdot (-1)$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt $\ker A = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt $\operatorname{im} A = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

b) Zu überprüfen ist, ob $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \ker A$ und $\operatorname{im} A \subseteq \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ gilt. Nach den Ergebnissen aus Teil a) gilt in beiden Fällen sogar Gleichheit. Also ist die Abbildung wohldefiniert.

c) Aus $\operatorname{Rang} A = 2$ folgt $\dim \operatorname{im} A = 2$ und $\dim \ker A = 3$, daraus folgt $\dim \mathbb{Q}^5 / \ker A = 5 - 3 = 2$. Damit ist h ein Isomorphismus.

Aufgabe 4.

a) Zeigen Sie: Ist U ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^4$, so ist die Menge aller linearen Abbildungen $h\colon \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^5$ mit $U \subseteq \ker h$ ein Untervektorraum von $\operatorname{Hom}(\mathbb{K}^4, \mathbb{K}^5)$

b) Zeigen Sie: Ist W ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^5$, so ist die Menge aller linearen Abbildungen $h\colon \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^5$ mit $\operatorname{im} h \subseteq W$ ein Untervektorraum von $\operatorname{Hom}(\mathbb{K}^4, \mathbb{K}^5)$.

c) Sei $h\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ definiert durch $h(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x$, und sei $H\colon \operatorname{Hom}(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^2) \to \operatorname{Hom}(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^2)$ definiert durch $H(\phi) = h \circ \phi$. Geben Sie eine geordnete Basis B von $\operatorname{Hom}(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^2)$ an sowie die Abbildungsmatrix von H bezüglich B und B.

Lösung.

a) Sei M die beschriebene Menge. Wegen $U \subseteq \ker 0 = \mathbb{K}^4$ gilt jedenfalls $0 \in M$, also $M \neq \emptyset$. Seien nun $h_1, h_2 \in M$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$. Dann gilt $U \subseteq \ker h_1$, $U \subseteq \ker h_2$. Für $u \in U$ gilt also $h_1(u) = h_2(u) = 0$, d.h. $(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2)(u) = 0$, also $u \in \ker(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2)$. Damit ist gezeigt $U \subseteq \ker(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2)$, also gilt $\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 \in M$.

b) Sei M die beschriebene Menge. Wegen $\operatorname{im} 0 = \{0\} \subseteq W$ gilt jedenfalls $0 \in M$, also $M \neq \emptyset$. Seien nun $h_1, h_2 \in M$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$. Sei $x \in \operatorname{im}(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2)$, etwa $x = (\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2)(y) = \alpha_1 h_1(y) + \alpha_2 h_2(y)$. Wegen $h_1, h_2 \in M$ gilt $\operatorname{im} h_1, \operatorname{im} h_2 \subseteq W$, somit $h_1(y), h_2(y) \in W$, und da W ein Unterraum ist, auch $x = \alpha_1 h_1(y) + \alpha_2 h_2(y) \in W$. Da x beliebig war, folgt $\operatorname{im}(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) \subseteq W$, also $\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 \in M$.

c) Zum Beispiel $B = (\binom{x}{y} \mapsto \binom{x}{0}, \binom{x}{y} \mapsto \binom{0}{x}, \binom{x}{y} \mapsto \binom{y}{0}, \binom{x}{y} \mapsto \binom{0}{y})$ und

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$