Übungsblatt 3

Besprechung am **09.04.2018**

Aufgabe 1 Zeigen Sie: Ist X^7 ein annihilierendes Polynom einer Matrix A, dann sind alle Eigenwerte von A gleich 0.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie jeweils das Minimalpolynom von

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Ist p ein annihilierendes Polynom von A, dann auch von $A^\top$.
b) Ist p ein annihilierendes Polynom sowohl von A als auch von B, dann auch von $A + B$.
c) Ist p ein annihilierendes Polynom sowohl von A als auch von B, dann auch von AB.
d) Wenn pq ein annihilierendes Polynom von A ist und $v \in \mathbb{K}^n$, dann ist $q(A)v \in \ker(p(A))$.

Aufgabe 4 Sei $p = X^5 + 2X^2 + X - 2$. Finden Sie eine Matrix N, sodass $p(N) = 0$. Können Sie mindestens 6 verschiedene Lösungen finden?

Aufgabe 5 **(Diese Aufgabe ist schriftlich abzugeben.)** Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $h : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass sich für teilerfremde Polynome p, q über $\mathbb{K}$ der Kern von $(pq)(h)$ als direkte Summe h-invarianter Unterräume darstellen läßt, nämlich folgendermaßen:

$$\ker((pq)(h)) = \ker(p(h)) \oplus \ker(q(h))$$

(Hinweis: Beachten Sie, dass sich mit geeigneten Polynomen u und v jeder Vektor z als $z = (up+vq)(h)(z)$ schreiben läßt.)