Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1 · Winter 2017/18 · **Minitest 11** 08.01.2018

	k							

Name (deutlich lesbar!) Matrikelnummer

Aufgabe 1. Seien V, W zwei endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeigen Sie: Wenn es einen injektiven Homomorphismus $f\colon V \to W$ und einen injektiven Homomorphismus $g\colon W \to V$ gibt, dann gilt $V \cong W$.

Lösung. Nach Satz der Vorlesung folgt aus der Existenz der genannten Homomorphismen $\dim V \leq \dim W$ und $\dim W \leq \dim V$, also $\dim V = \dim W$, und da es sich um endlich-dimensionale Räume handelt, folgt daraus mit einem weiteren Satz der Vorlesung die Behauptung.

Aufgabe 2. Sei $V = \mathbb{K}^{n\times n}$ der Raum aller $n \times n$-Matrizen und $f\colon V \to V$ definiert durch $f(A) = A^\top$. Bestimmen Sie $\ker f$ und $\operatorname{im} f$.

Lösung. Wegen $(A^\top)^\top = A$ ist f selbstinvers, insbesondere also bijektiv, also injektiv und surjektiv. Injektivität liefert $\ker f = \{0\}$, Surjektivität liefert $\operatorname{im} f = V$.