# Übungsblatt 13

Besprechung am **22.1.2018**

---

**Aufgabe 1** (Dualraum)

a) Sei $(b_1, b_2)$ eine geordnete Basis des Vektorraums $\mathbb{K}^2$ über dem Körper $\mathbb{K}$ und $(\beta_1, \beta_2)$ die dazu duale Basis. Bestimmen Sie für den Vektor $v = 5b_1 + 7b_2$ die Werte $\beta_1(v)$ und $\beta_2(v)$.

b) Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ wird bekanntlich geometrisch gerne als Pfeil in einer Ebene dargestellt, d.h. im wesentlichen durch zwei Punkte, wobei die Reihenfolge wesentlich ist. Gelegentlich ist der erste der beiden Punkte der Nullpunkt, man kann die Pfeile aber überall zeichnen.

Analog kann man ein Funktional $\varphi \in (\mathbb{R}^2)^*$ des Dualraums durch zwei parallele Geraden darstellen, wobei die erste mitunter durch den Nullpunkt verläuft.

Um $\varphi(v)$ zu bestimmen zeichnet man das Geradenpaar für $\varphi$ so, dass die erste Gerade durch den Startpunkt von $v$ führt. Wenn der Abstand zwischen den Geraden kürzer als die Länge des Vektors ist, zeichnet man zweckmäßigerweise weitere Geraden im selben Abstand dazu. Damit entsteht auf dem Vektor eine Skala. Die Länge des Vektors auf dieser Skala definiert dann die Zahl $\varphi(v)$.

Begründen Sie, dass $\varphi$ somit durch das Geradenpaar aus den beiden Punktmengen $\varphi^{-1}(\{0\})$ bzw. $\varphi^{-1}(\{1\})$ dargestellt werden kann.

Begründen Sie ferner, dass diese Definition tatsächlich zu einer linearen Abbildung führt.

c) Die Vektoren $\lambda v$, $v + w$ und $-v$ werden bekanntlich durch Verlängern (Verkürzen) eines Vektors bzw. durch die Diagonale des aufgespannten Parallelogramms bzw. Richtungsumkehr interpretiert. Wie lassen sich diese Rechenoperationen analog für Funktionale $\varphi \in (\mathbb{R}^2)^*$ des Dualraums interpretieren?

d) Wählen Sie zwei linear unabhängige Vektoren von $\mathbb{R}^2$ (also eine Basis) und zeichnen Sie diese als Pfeile beginnend im Nullpunkt. Tragen Sie dann auch die duale Basis (als je zwei Geradenpaare) in die Skizze ein. Stellen Sie dabei eine Zusammenhang mit Teil a) her.

**Aufgabe 2** (Transponieren) Sei $h : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen über $\mathbb{K}$. Zeigen Sie:

a) Jede lineare Abbildung $\beta : h(V) \to \mathbb{K}$ lässt sich zu einer linearen Abbildung $\hat{\beta} : W \to \mathbb{K}$ fortsetzen (d.h., sodass $\hat{\beta}(w) = \beta(w)$, für alle $w \in h(V)$). *Hinweis:* Als Folgerung aus dem Basisergänzungssatz wissen wir, dass es zu $h(V)$ einen Komplementärraum $X$ gibt, sodass $W = h(V) \oplus X$. Sie können dann festlegen: $\hat{\beta}(w + x) = \beta(w)$, für alle $w \in h(V)$ und $x \in X$. Warum ist $\hat{\beta}$ damit wohldefiniert?

b) Wenn $h$ injektiv ist, dann ist $h^\top : W^* \to V^*$ surjektiv. *Hinweis:* Wenn Sie im Beweis eine lineare Abbildung von $W$ nach $\mathbb{K}$ definieren sollten, diese aber nur auf einem Unterraum festgelegt ist, dann können Sie wie in Teil a) vorgehen.

c) Wenn $h$ surjektiv ist, dann ist $h^\top : W^* \to V^*$ injektiv.

**Aufgabe 3** (Affine Unterräume)

a) Zeigen Sie für $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$, dass $\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\}$ entweder leer oder ein affiner Unterraum von $\mathbb{K}^n$ ist.

b) Bestimmen Sie den Durchschnitt $A \cap B$ der affinen Unterräume

$$A = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}\}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

**Aufgabe 4** (Projektiver Raum) Punkte im projektiven Raum $\mathbb{P}^2$ entsprechen den 1-dimensionalen Unterräumen von $\mathbb{K}^3$. Ebenso entsprechen die Geraden von $\mathbb{P}^2$ den 2-dimensionalen Unterräumen von $\mathbb{K}^3$. Man sagt auch, eine Punkt $P$ von $\mathbb{P}^2$ liegt auf einer Geraden $g$ von $\mathbb{P}^2$, wenn $P \subseteq g$. Zeigen Sie

a) Zu zwei verschiedenen Punkten von $\mathbb{P}^2$ gibt es stets genau eine Gerade von $\mathbb{P}^2$, auf der die beiden Punkte liegen.

b) Zu zwei verschiedenen Geraden von $\mathbb{P}^2$ gibt es stets genau einen Punkt von $\mathbb{P}^2$, der auf beiden Geraden liegt.

In der affinen Geometrie gilt ebenfalls, dass es zu je zwei verschiedenen Punkten genau eine diese verbindende Gerade gibt. Außerdem gilt dort, dass es zu einem Punkt und einer Geraden stets eine zu dieser parallele Gerade gibt, auf welcher jener Punkt liegt. Überlegen Sie sich, wie diese beiden Aussagen in der projektiven Geometrie vereinheitlicht werden.

**Aufgabe 5** (Determinanten) Sei $n \geq 2$ und sei $\mathscr{M} \subset \mathbb{Q}^{n \times n}$ die Menge aller $n \times n$-Matrizen, deren Einträge nur 0 oder 1 sind. Berechnen Sie $\sum_{A \in \mathscr{M}} \det(A)$.