Übungsblatt 12

Besprechung am **15.1.2017**

Aufgabe 1 Sei $V = \mathbb{Q}^3$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass die Spalten von B eine geordnete Basis von V sind.

b) Sei $(5, -2, 1)$ die Koordinatendarstellung von $x \in V$ bezüglich der Standardbasis I_3. Berechnen Sie die Koordinatendarstellung von x bezüglich B.

c) Sei $(1, 1, 1)$ die Koordinatendarstellung von $y \in V$ bezüglich B. Berechnen Sie die Koordinatendarstellung von x bezüglich Standardbasis.

d) Was sind die Basiswechselmatrizen $T_{B \to I_3}$ und $T_{I_3 \to B}$?

Aufgabe 2 Seien $V = \mathbb{Q}[X]_{\leq 3}$ und $W = \mathbb{Q}[X]_{\leq 2}$ die $\mathbb{Q}$-Vektorräume der Polynome vom Grad höchstens drei bzw. zwei. Sei $\frac{d}{dX} \colon V \to W$ die (formale) Ableitung.

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\frac{d}{dX} \colon V \to W$ bezüglich der geordneten Basen $B_1 = (1, X, X^2, X^3)$ und $B_2 = (1, X, X^2)$.

b) Sei $\tilde{B}_1 = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$. Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $T_{\tilde{B}_1 \to B_1}$.

c) Sei $\tilde{B}_2 = (1, X, X(X-1))$. Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $T_{B_2 \to \tilde{B}_2}$.

d) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\frac{d}{dX}$ bezüglich $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2$.

Aufgabe 3 Sei $V = \mathbb{Q}^2$ und $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ bzw. $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine geordnete Basis von V.

a) Seien $b_1^*, b_2^* \in V^*$ Funktionale mit $b_1^*(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = -3x + 2y$, $b_2^*(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = 2x - y$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $B^* = (b_1^*, b_2^*)$ die zu B duale Basis ist.

b) Bestimmen Sie die zu C duale Basis.

Aufgabe 4 Diese Aufgabe ist schriftlich zu bearbeiten.
Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $\cdot^\top \colon \operatorname{Hom}(V, W) \to \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$, $h \mapsto h^\top$ ist linear.

b) Für jedes $w \in W$ mit $w \neq 0$ existiert ein Funktional $y^* \in W^*$ mit $y^*(w) = 1$.
Hinweis: Verwenden Sie dazu den Basisergänzungssatz (Satz 44) und Satz 51.

c) Die Abbildung $\cdot^\top$ ist injektiv.

Aufgabe 5 Seien U, V, W drei $\mathbb{K}$-Vektorräume, $f \colon U \to V$ und $g \colon V \to W$ Homomorphismen und $h := g \circ f$. Zeigen Sie, dass

$$h^\top = f^\top \circ g^\top$$

gilt.