Übungsblatt 11

Besprechung am **08.01.2018**

Aufgabe 1. Erinnern Sie sich, dass eine Funktion $f\colon A \to B$ gemäß Def. 8 eine Teilmenge von $A \times B$ ist, nämlich die Menge $\{\, (x, f(x)) : x \in A \,\}$.

Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f\colon V \to W$ eine Funktion. Zeigen Sie: f ist genau dann linear (im Sinn von Def. 34), wenn f ein Untervektorraum von $V \times W$ ist.

Aufgabe 2. Seien U, V, A, B Vektorräume und $f\colon U \to A$ sowie $g\colon V \to B$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie:

a) Es gibt genau eine lineare Abbildung $h\colon (U \otimes V) \to (A \otimes B)$ mit $h(u \otimes v) = f(u) \otimes g(v)$ für alle $u \in U$ und $v \in V$.

b) Wenn f und g surjektiv sind, dann ist auch h surjektiv.

Aufgabe 3. Die lineare Funktion $f\colon \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]$ sei im Sinn von Satz 51 definiert durch $f(X^i) = X^{2i}$ $(i \in \mathbb{N})$.

a) Bestimmen Sie Basen von $\ker f$, $\operatorname{im} f$, sowie $\mathbb{Q}[X]/\operatorname{im} f$.

b) Geben Sie einen Unterraum U von $\mathbb{Q}[X]$ an, so dass $\dim \mathbb{Q}[X]/U = 5$ ist.

Aufgabe 4. Es seien $V = \mathbb{Q}^4/\langle \begin{pmatrix} 1\\2\\3\\4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\-1\\1\\-1 \end{pmatrix} \rangle$ und $W = \langle \begin{pmatrix} 1\\0\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{Q}^3$.

a) V und W sind isomorph. Geben Sie zwei Isomorphismen $f\colon V \to W$ und $g\colon W \to V$ an.

b) Untersuchen Sie, ob die Funktion $h\colon V \to W$, $h([x]_\sim) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1\\ 3 & -3 & -3 & 3\\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} x$ wohldefiniert ist.

Aufgabe 5.

a) Zeigen Sie: Für jede lineare Abbildung $h\colon V \to V$ mit der Eigenschaft $h^2 = h$ gilt $V = \ker h \oplus \operatorname{im} h$. (*Hinweis:* Für alle $v \in V$ gilt $v = (v - h(v)) + h(v)$.)

b) Geben Sie eine lineare Abbildung $h\colon V \to V$ an mit $\ker h + \operatorname{im} h \neq V$.

c) Geben Sie eine lineare Abbildung $h\colon V \to V$ an mit $\ker h \cap \operatorname{im} h \neq \{0\}$.

Wir wünschen Ihnen erholsame Ferien und alles Gute im neuen Jahr!