k

Name (deutlich lesbar!) Matrikelnummer

Aufgabe 1. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie: A ist genau dann invertierbar wenn für jedes $b \in \mathbb{K}^n$ das inhomogene lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eine Lösung hat.

Lösung. „$\Rightarrow$“ Wenn A invertierbar ist, ist $x = A^{-1}b$ eine Lösung.

„$\Leftarrow$“ Wenn alle Gleichungssysteme $Ax = b$ lösbar sind, dann insbesondere $Ax = e_1, \ldots, Ax = e_n$. Sind $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{K}^n$ die entsprechenden Lösungen, so gilt $A(u_1, \ldots, u_n) = I_n$, also $A^{-1} = (u_1, \ldots, u_n)$.

Aufgabe 2. Geben Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung. $L = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{Q}\}.$