Übungsblatt 8

Besprechung am **27.11.2017**

Aufgabe 1 Schreiben Sie jede der folgenden Permutationen als Komposition disjunkter Zyklen, bestimmen Sie ihre Fixpunkte und ihr Vorzeichen.

a) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 8 & 7 & 4 & 1 & 6 & 9 & 5 & 10 & 3 \end{pmatrix} \in S_{10}$

b) $\pi = (1\ 2\ 4\ 3) \circ (5\ 8\ 1\ 7\ 3\ 10) \circ (5\ 3\ 1) \in S_{10}$

c) $(1\ 5\ 4\ 3)^{402} \in S_{10}$

Aufgabe 2 Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

a) Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

b) Falls A invertierbar ist und $A^{-1} = A^\top$, dann gilt $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

c) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\det(A^k) = \det(A)^k$.

d) Ist A die Permutationsmatrix einer Permutation $\pi \in S_n$, so gilt $\det(A) = \operatorname{sgn}(\pi)$.

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass für die folgenden zwei $n \times n$ Matrizen gilt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & \cdots & \cdots & 5 \\ 5 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 5 \\ 5 & \cdots & \cdots & 5 & 1 \end{vmatrix} = (5n-4)(-4)^{n-1}.$$

Aufgabe 4 Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{Q}$, für die die folgenden Vektoren linear abhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4.$$

Aufgabe 5 Beweisen Sie Satz 33 aus der Vorlesung: Sind $v, w, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$, so gilt

$$\det\big(v, v_2, \cdots, v_n\big) + \det\big(w, v_2, \cdots, v_n\big) = \det\big(v + w, v_2, \cdots, v_n\big).$$