Übungsblatt 7

Besprechung am **20.11.2017**

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme, und zwar jeweils einmal für $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_7$ und einmal für $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2.

a) Zeigen Sie: Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt $\operatorname{Rang}(A^2) \leq \operatorname{Rang}(A)$.

b) Konstruieren Sie eine Matrix $A \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ mit $\operatorname{Rang}(A) = 3$ und $\operatorname{Rang}(A^2) = 2$.

c) Zeigen Sie: Es gibt keine Matrix $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit $\operatorname{Rang}(A) = 3$ und $\operatorname{Rang}(A^2) = 2$.

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Eine Matrix $A^\bullet \in \mathbb{K}^{m\times n}$ heißt *Rechtsinverse* von A, falls gilt $AA^\bullet = I_n$.

a) Zeigen Sie: Eine Rechtsinverse von A existiert genau dann, wenn $\operatorname{Rang}(A) = n$ gilt.

Hinweis: Satz 24 könnte sich als nützlich erweisen.

b) Berechnen Sie eine Rechtsinverse von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 3}$.

Hinweis: Stellen Sie ein geeignetes lineares Gleichungssystem für die Einträge von $A^\bullet$ auf und berechnen Sie dessen Lösungen.

c) Zeigen Sie: Wenn A eine eindeutig bestimmte Rechtsinverse hat, dann gilt $n = m$.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L \subseteq (\mathbb{Q}^{2\times 2})^2$ des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathrm{II} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Aufgabe 5. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der für eine gegebene Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und gegebene Vektoren $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{K}^n$ alle Tupel $(\beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{K}^k$ findet, so dass für $b = \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_k b_k$ das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mindestens eine Lösung hat.