Übungsblatt 1

Besprechung am **09.10.2017**

Aufgabe 1 (Formeln)

a) Übersetzen Sie die folgende Formel in natürliche Sprache: $\forall x \in X : x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$.

b) Übersetzen Sie die folgende Aussage in eine Formel: *Es gibt genau eine lila Kuh.* Verwenden Sie dazu Q als Symbol für die Menge aller Kühe, und $\mathrm{lila}(x)$ für „x hat die Farbe lila".

c) Formen Sie die Formel $\neg \forall x \in X : p(x) \Rightarrow \exists y \in Y : g(x, y)$ in eine äquivalente Formel um, bei der alle Negationssymbole $\neg$ unmittelbar vor einem p oder g stehen.

d) Es sei A die Menge aller natürlichen Zahlen, die die dritte Potenz einer Zahl sind, die durch 5 teilbar ist. Übersetzen Sie die Definition von A in Formelzeichen.

e) Es sei $B = \{\, u \in \mathbb{N} \mid \neg \exists\; v \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : v^2 \mid u \,\}$. Übersetzen Sie die Definition von B in natürliche Sprache.

Aufgabe 2 (Rechnen mit Mengen)

a) Gegeben seien die Mengen $A = \big\{3, \{5\}, 7\big\}$ und $B = \big\{3, \{5, 7\}\big\}$. Man gebe folgende Mengen explizit an:

$$A \cup B, \quad A \setminus B, \quad A \times B, \quad \bigcap_{a \in \mathcal{P}(A)} a.$$

b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$$\big\{\{3\}, \emptyset\big\} \subseteq \big\{3, \{3\} \cup \{4\}, \{3\} \cap \{4\}, \{3\} \setminus \{4\}\big\}$$
$$\big\{3, \{4\}\big\} \in \big\{\{3\}, \{4\}, 3, 2, \{1\}\big\}$$
$$\big\{3, \{4\}\big\} \subseteq \big\{\{3\}, \{\{4\}\}, 3, 2, \{1\}\big\}$$

Aufgabe 3 (Distributivgesetze)

a) Zeigen Sie Satz 2.2: Für alle Mengen A, B, C gilt

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C).$$

b) Zeigen Sie auch das folgende Distributivgesetz: Für alle Mengen A, B, C gilt

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Aufgabe 4 (De Morganschen Gesetze) Beweisen Sie Satz 1.5 und 1.6: Wenn A und Λ Mengen sind, und für jedes $\lambda \in \Lambda$ auch A_λ eine Menge ist, dann gilt

$$A \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \setminus A_\lambda) \quad \text{und} \quad A \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A \setminus A_\lambda).$$

Aufgabe 5 (Potenzmenge) Sei A eine Menge, und sei $x \notin A$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\mathcal{P}(A \cup \{x\}) = \bigcup_{T \in \mathcal{P}(A)} \{T, T \cup \{x\}\}.$$