Übungsblatt 3

Besprechung am **23.10.2017**

Aufgabe 3. Diese Aufgabe ist schriftlich zu bearbeiten.

a) Sei A eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Zeigen Sie: Es gibt eine Menge B und eine Funktion $f\colon A \to B$, so dass $\forall\, a, b \in A : a \sim b \iff f(a) = f(b)$.

b) Nach Satz 6 hat jede Funktion $f\colon A \to B$ eine Zerlegung $f = h \circ g$, bei der g surjektiv und h injektiv ist. Kann man auch für jedes f eine Zerlegung $f = h \circ g$ finden, bei der g injektiv und h surjektiv ist? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Lösung.

a) Wähle $B = A/\!\sim$ und definiere $f(a) = [a]_\sim$ für alle $a \in A$. Dann gilt $\forall\, a, b \in A : a \sim b \iff f(a) = f(b)$. Seien nämlich $a, b \in A$ beliebig.

„$\Rightarrow$“ Aus $a \sim b$ folgt $[a]_\sim = [b]_\sim$, also $f(a) = f(b)$.

„$\Leftarrow$“ Aus $f(a) = f(b)$ folgt $[a]_\sim = [b]_\sim$, also $a \sim b$ (mit Satz 3)

b) Stimmt. Wähle $C = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$ und $g\colon A \to C$, $g(x) = (x, 0)$. Diese Funktion ist sicher injektiv. Die Funktion $h\colon C \to B$ mit $h(x, 0) = f(x)$ und $h(x, 1) = x$ ist surjektiv und für alle $x \in A$ gilt $f(x) = h(g(x))$.