Lineare Algebra und Analytische Geometrie II · Sommer 2018 24.09.2018

Zweite Klausur

	k							

Name (deutlich lesbar!) Matrikelnummer

- Es sind keine anderen Hilfsmittel als ein Stift zugelassen, insbesondere keine Unterlagen und keine elektronischen Geräte. Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus.
- Die Antworten zu Aufgabe 1 sind auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Notieren Sie die Antworten für die weiteren Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten leeren Papier. Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und legen Sie bei der Abgabe die Blätter in der Reihenfolge der Aufgaben zusammen, mit dem Aufgabenblatt als Deckblatt. Die abgegebenen Blätter werden oben links zusammengetackert. Halten Sie deshalb beim Schreiben genügend Abstand zu dieser Ecke.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Sie können die Teilnahme an der Klausur jederzeit ohne Abgabe einer Lösung beenden. Ein solcher Abbruch wird nicht als Fehlversuch gewertet.

Aufgabe 1. Wahr oder falsch?

	wahr	falsch
Jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ ist Eigenwert der Nullmatrix	☐	☒
$X \mid 5 + 3X - 7X^2 + 8X^3 - 4X^4 - X^5 + 3X^6$	☐	☒
Für alle Polynome $u, v, w \in \mathbb{K}[X]$ mit $\mathrm{lc}(u) = 1$ gilt $\gcd(uv, uw) = u \gcd(v, w)$	☒	☐
A und $A^\top$ haben dieselben Eigenwerte	☒	☐
Die Summe aller n Eigenwerte von $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist gleich $\det(A)$	☐	☒
Wenn $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ keine mehrfachen Eigenwerte hat, dann ist A diagonalisierbar	☒	☐
Jede Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist Nullstelle des Minimalpolynoms	☒	☐
Die Dimension des Eigenraums gibt die Zahl der Jordan-Kästchen an	☒	☐
Für alle $p, q \in \mathbb{K}[X]$ und alle $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt $p(A)q(A) = q(A)p(A)$	☒	☐
Jeder endlich erzeugte Modul ist torsionsfrei.	☐	☒
Die Berechnung von Av für gegebene $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $v \in \mathbb{K}^n$ kostet $\mathrm{O}(n^2)$ Operationen	☒	☐
$p, q \in \mathbb{C}[X]$ vom Grad n kann man mit $\mathrm{O}(n \log n)$ Operationen in $\mathbb{C}$ multiplizieren	☒	☐

Aufgabe 2.

a) Untersuchen Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ auf Diagonalisierbarkeit und geben Sie ihr Minimalpolynom an.

b) Konstruieren Sie eine Matrix $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$, die die Eigenwerte 0 und 1 hat, wobei $E_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ sein soll.

c) Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ Matrizen, $E_A \subseteq \mathbb{K}^n$ sei ein Eigenraum von A und $E_B \subseteq \mathbb{K}^n$ sei ein Eigenraum von B. Zeigen oder widerlegen Sie: jeder Vektor in $E_A \cap E_B$ ist ein Eigenvektor von AB.

Lösung.

a) Zunächst bestimmen wir die Eigenwerte

$$\begin{aligned}\det(XI_n - A) &= \begin{vmatrix} X-1 & -3 & -8 \\ 0 & X+3 & 0 \\ -2 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X+3)\begin{vmatrix} X-1 & -8 \\ -2 & X-1 \end{vmatrix} = (X+3)((X-1)^2 - 16) \\ &= (X+3)(X^2 - 2X - 15) = (X+3)^2(X-5)\end{aligned}$$

Daraus folgt: Die Eigenwerte lauten -3 (doppelt) und 5 (einfach). Der Eigenraum von 5 kann nur eindimensional sein und muss deshalb nicht berechnet werden. Wir berechnen die Dimension des Eigenraums zu -3:

$$-3I_n - A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt $\dim E_{-3} = \dim\ker(-3I_n - A) = 1$, und daraus folgt, dass A nicht diagonalisierbar ist, und dass das Minimalpolynom $(X+3)^2(X-5)$ lautet.

b) Wir wählen $E_0 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ und setzen $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $A = T\,\mathrm{diag}(1,1,0)T^{-1}$ eine Matrix mit den geforderten Eigenschaften.

Invertierung von T:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Damit:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Stimmt: Ist nämlich λ_A der Eigenwert von A zum Eigenraum E_A und λ_B der Eigenwert von B zum Eigenraum E_B, so gilt für jedes $v \in E_A \cap E_B$, dass $(AB)v = A(Bv) = A\lambda_B v = \lambda_B(Av) = \lambda_B(\lambda_A v)$. Damit ist v ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_A\lambda_B$.

Aufgabe 3. Seien V, W zwei Skalarprodukträume mit den Skalarprodukten $\langle\cdot|\cdot\rangle_V$ bzw. $\langle\cdot|\cdot\rangle_W$. Auf dem Raum $V \times W$ sei definiert $\langle(v_1, w_1)|(v_2, w_2)\rangle := \langle v_1|v_2\rangle_V + \langle w_1|w_2\rangle_W$.

a) Zeigen Sie, dass $\langle\cdot|\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf $V \times W$ ist.

b) Seien $h_V\colon V \to V$ und $h_W\colon W \to W$ Isometrien (bzgl. $\langle\cdot|\cdot\rangle_V$ bzw. $\langle\cdot|\cdot\rangle_W$), und sei $h\colon V\times W \to V \times W$ definiert durch $h(v,w) := (h_V(v), h_W(w))$. Zeigen Sie: h ist eine Isometrie (bzgl. $\langle\cdot|\cdot\rangle$).

c) Sei nun $V = \mathbb{R}^2$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle (x_1, x_2) | (y_1, y_2) \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

Berechnen Sie eine ONB von V, indem Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Basis $\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\}$ anwenden.

Lösung.

a) Für alle $(v, w) \in V \times W$ gilt $\langle (v, w) | (v, w) \rangle = \underbrace{\langle v|v \rangle_V}_{\geq 0} + \underbrace{\langle w|w \rangle_W}_{\geq 0} \geq 0$, weil $\langle \cdot | \cdot \rangle_V$ und $\langle \cdot | \cdot \rangle_W$ Skalarprodukte sind. Da die Summe zweier nichtnegativer Zahlen nur dann Null sein kann, wenn beide Summanden Null sind, gilt außerdem $\langle (v, w) | (v, w) \rangle = 0 \iff (v, w) = 0$.

Symmetrie und Linearität folgen unmittelbar aus der Symmetrie und Linearität der gegebenen Skalarprodukte.

b) Zunächst ist klar, dass sich die Linearität von h_V und h_W auf h überträgt.

Schreibe $\| \cdot \|_V$, $\| \cdot \|_W$ und $\| \cdot \|$ für die zu $\langle \cdot | \cdot \rangle_V$, $\langle \cdot | \cdot \rangle_W$ bzw. $\langle \cdot | \cdot \rangle$ gehörenden Normen. Für alle $(v, w) \in V \times W$ gilt dann

$$\|h(v, w)\| = \|(h_V(v), h_W(w))\| = \|h_V(v)\|_V + \|h_W(w)\|_W = \|v\|_V + \|w\|_W = \|(v, w)\|.$$

Dabei wurde im dritten Schritt verwendet, dass h_V und h_W Isometrien sind.

c) $b_1 = \binom{1}{0}$, $b_2 = \binom{0}{1}$.

$$\begin{aligned} v_1 &= b_1 & u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_2 &= b_2 - \langle b_2 | v_1 \rangle v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{(-1)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} & u_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eine ONB ist demnach $\{\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{0}, \frac{1}{\sqrt{6}}\binom{1}{2}\}$.

Aufgabe 4.

a) Berechnen Sie die Hermite-Normalform von $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3 \times 3}$.

b) Sei R ein Integritätsbereich und M_1, M_2 zwei R-Moduln. Weiter sei $h\colon M_1 \to M_2$ ein Modul-Homomorphismus. Zeigen Sie: Wenn M_2 torsionsfrei ist, gilt $\mathrm{Tor}(M_1) \subseteq \ker h$.

c) Zeigen Sie: Wenn die Berechnung von p^2 für jedes gegebene $p \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad n mit $\mathrm{O}(n)$ Operationen in $\mathbb{Q}$ möglich ist, dann kann man auch das Produkt pq zweier beliebiger Polynome $p, q \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad n mit $\mathrm{O}(n)$ Operationen in $\mathbb{Q}$ berechnen.

Hinweis: Betrachten Sie $(p + q)^2$.

Lösung.

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ + \\ -2 \quad -3 \end{array} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -1 \\ + \end{array}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ + \\ -2 \quad | \cdot (-1) \end{array} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ + \\ \\ \end{array} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Sei $x \in \mathrm{Tor}(M_1)$ beliebig. Dann gibt es ein $e \in R \setminus \{0\}$ mit $ex = 0$. Dann gilt $h(ex) = h(0) = 0$. Folglich $eh(x) = 0$, und weil M_2 torsionsfrei ist, folgt $h(x) = 0$, also $x \in \ker h$.

c) $(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$, also $pq = ((p + q)^2 - p^2 - q^2)/2$. Auf der rechten Seite kommen nur Quadrierungen, Additionen, und Skalarmultiplikationen vor, und all diese Operationen lassen sich (nach Annahme bzw. offensichtlich) in linearer Zeit durchführen. Daraus folgt die Behauptung.