Übungsblatt 11

Besprechung am **11.06.2018**

Aufgabe 1 Seien $f, g, h, k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ und $c \in \mathbb{R}_0^+$, mit $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $f = \mathrm{O}(h) \wedge g = \mathrm{O}(k) \implies f + g = \mathrm{O}(h + k)$;

b) $f = \mathrm{O}(h) \wedge g = \mathrm{O}(k) \implies f + g = \mathrm{O}(\max(h, k))$;

c) $f = \mathrm{O}(h) \wedge g = \mathrm{O}(k) \implies fg = \mathrm{O}(hk)$;

d) $f = \mathrm{O}(cg) \implies f = \mathrm{O}(g)$;

e) $f = \mathrm{O}(g) \implies f = \mathrm{O}(cg)$;

f) $f = \mathrm{O}(gh) \implies f = g\,\mathrm{O}(h)$.

Aufgabe 2 Betrachten Sie den folgenden Algorithmus zur Potenzierung von Ringelementen:

function $\textsc{pow}(x,\, n)$
  if $n = 0$ **then return** 1
  else if n is even **then return** $\textsc{pow}(x, \frac{n}{2})^2$
  else if n is odd **then return** $x \cdot \textsc{pow}(x, n-1)$
  end if
end function

a) Zeigen Sie, dass damit tatsächlich für jedes Element x eines Rings R und jedes $n \in \mathbb{N}$ die Potenz x^n (gemäß den Rechenoperationen in R) berechnet wird.

b) Schätzen Sie ab, wie viele Ringoperationen in Abhängigkeit von n durchgeführt werden. Eine O-Abschätzung genügt.

Aufgabe 3 Sei $A = ((a_{i,j}))_{i,j=1}^n \in \mathbb{K}^{n \times n}$, sodass

$$|i - j| > 1 \implies a_{i,j} = 0.$$

Zeigen Sie, dass die Determinante von A mit $\mathrm{O}(n)$ Körperoperationen berechnet werden kann.

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass das Produkt einer Hankel-Matrix der Größe $n \times n$ und einer ebenso großen Töplitz-Matrix mit $\mathrm{O}(n^2)$ Körperoperationen berechnet werden kann.

Aufgabe 5 Seien p, q teilerfremde natürliche Zahlen (verschieden von 0) und $w \in \mathbb{Z}$.

a) Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte $g, p, q \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $0 \leq a < p$ und $0 \leq b < q$ sowie

$$\frac{w}{pq} = g + \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

b) Stellen Sie konkret den Bruch 34/77 als Summe wie oben beschrieben dar.